Devoir Surveillé n°6

Samedi 17 mai, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Le sujet compte 5 exercices répartis en trois pages.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) = 2P(-1)\}$.

(a) Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.

(b) Soit $P = 3X^2 + 2X + 3$.
Vérifier que P appartient à F et déterminer ses coordonnées dans la base trouvée dans la question précédente.

2. On note $G = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. On note $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$.
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa dimension.

4. Les familles $\mathcal{F}$ suivantes sont-elles libres ? génératrices de E ?

(a) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = (A_1, A_2, A_3)$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n, v_n = 2^n - 4$ et $w_n = \frac{n^2-2n}{n+1}$
(*pour travailler sur la caractéristique « génératrice », on pourra utiliser la suite* (p_n) *de terme général* $p_n = n(n-2)$)

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On définit $f_n \ : \ x \mapsto x^n - nx + 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 1]$. On la note u_n.

2. Calculer u_2.

3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$.
En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant \frac{2}{n}$.
En déduire la limite de (u_n).

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 3.

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose aussi $\beta = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. **(a)** Donner les racines cinquièmes de l'unité, puis décomposer le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) En déduire une décomposition de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 1$ par $X - 1$. On appellera Q le quotient.

3. Déduire de **1.(b)**, sans aucun calcul, l'écriture factorisée de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

4. Développer cette dernière expression et en déduire la valeur des réels $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

5. Justifier que α et β sont racines de $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ et en déduire la valeur exacte de α.

Exercice 4.

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$.

1. Construire le tableau des variations complet de g (avec valeurs ou limites aux bornes).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α.
Montrer que $1 < \alpha < 2$.

3. Étudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Partie B.

1. Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$.
f est-elle dérivable en 0 ?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. **(a)** Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

(b) Construire le tableau des variations de f (en y faisant figurer le réel α de la **partie A.**).

Partie C.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

(b) En déduire que la suite est convergente.

2. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente, le nombre 0. On se propose de recherche s'il existe d'autres solutions à cette équation.

(a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.

(b) Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.

(c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, +\infty[$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5.

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
⋆ si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois ;
⋆ dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.
On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance $E(X)$.

2. **(a)** Montrer que pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

(b) Que vaut $\mathbf{P}_{(X=6)}(Y = 0)$?

(c) En utilisant la formule des probabilités totales, déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbf{P}(Y = 0)$.

3. Calculer de même, $\mathbf{P}(Y = 1)$ et $\mathbf{P}(Y = 2)$.

4. Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance et sa variance.