Corrigé du DS n°6

Correction 1.

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $P = aX^2 + bX + c$.
$P \in F \iff a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2(a(-1)^2 - b + c) \iff a - 3b + c = 0 \iff c = 3b - a$

Donc $$\begin{aligned} F &= \{aX^2 + bX + 3b - a,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^2-1) + b(X+3),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(X^2-1, X+3) \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\boxed{F \text{ est un espace vectoriel}}$.

On note $\boxed{P_1 = X^2 - 1 \text{ et } P_2 = X + 3}$, ces deux polynômes forment une famille génératrice de F.

Ils sont de degrés échelonnés donc ils forment aussi une famille libre.

Donc $\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une base de } F}$.

(b) $P(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 8$ et $P(-1) = 3 \times (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 3 - 2 + 3 = 4$.

Donc $2P(-1) = P(1)$, donc $\boxed{P \text{ est dans } F}$.

On note (α, β) les coordonnées de P dans la base (P_1, P_2).

Alors $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ soit $$\begin{aligned} 3X^2 + 2X + 3 &= \alpha(X^2 - 1) + \beta(X+3) \\ &= \alpha X^2 + \beta X - \alpha + 3\beta \end{aligned}$$

Donc en identifiant les coefficients de X^2 et de X, on trouve $\alpha = 3$ et $\beta = 2$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } P \text{ dans la base } (P_1, P_2) \text{ sont } (3,2).}$

2.
- La suite nulle est constante égale à 0 donc sa limite est 0 donc elle est dans G.
- Soient u et v deux suites de G, et soit λ un réel.
  On note $w = u + \lambda v$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$.
  u est dans G donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et v est dans G donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda v_n = 0$.
  Donc par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ donc $w \in G$.

Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

3. $x - 2y = 0 \iff x = 2y$ donc $$\begin{aligned} H &= \{(2y, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(2,1,0) + z(0,0,1),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((2,1,0),(0,0,1)) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Et la famille $((2,1,0),(0,0,1))$ est génératrice de H, et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre, donc c'est une base de H.

Donc $\boxed{H \text{ est de dimension } 2}$.

4. (a) Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels, on suppose que $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \mathbf{0}_{2,2}$.

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Donc $$\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et avec $L_2 + L_3$ on trouve $\lambda_2 = 0$ et donc avec L_2, $\lambda_3 = 0$.

Donc $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$.

Or $\dim(E) = 4$ et $\mathcal{F}$ n'a que 3 éléments, donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

(b)
- Montrons que $\mathcal{F}$ est libre : soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels, on suppose que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = z$ où z est la suite nulle.
  Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 n + \lambda_2(2^n - 4) + \lambda_3 \times \frac{n^2 - 2n}{n+1} = 0$
  En particulier pour $n = 0$: $\lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times (-3) + \lambda_3 \times 0 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$.
  Pour $n = 2$: $2\lambda_1 + 0 + \lambda_3 \times 0 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$.

Et donc pour $n=1$: $0+0+\lambda_3\times(-\frac{1}{2})=0$ donc $\lambda_3=0$.
Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est libre}}$.

- Montrons que l'on ne peut pas trouver de réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $p=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w$.
$\lambda_1 u_0+\lambda_2 v_0+\lambda_3 w_0=-3\lambda_2$ et $p_0=0$ donc il faudrait $\lambda_2=0$.
$\lambda_1 u_2+0v_2+\lambda_3 w_2=2\lambda_1$ et $p_2=0$ donc il faudrait $\lambda_1=0$.
Alors pour $n=1$, $\lambda_3 w_1=-\frac{1}{2}\lambda_3$ et $p_1=-1$ donc il faudrait $\lambda_3=2$, mais pour $n=3$, cela donnerait $2\times\frac{3}{4}=3$ ce qui n'est pas vrai.
Donc $p\notin \mathrm{Vect}\,(u,v,w)$ donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

Correction 2.

1. Pour $n\geqslant 2$, f_n est un polynôme, donc continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.
⋆ f_n est continue sur $[0,1]$
⋆ $\forall x\in\mathbb{R}, f_n'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$.
pour $x\in[0,1[$, $x^{n-1}<1$ donc $f_n'(x)<0$.
Donc f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.
⋆ $f_n(0)=0+1-0=1$ et $f_n(1)=1+1-n=2-n$
Donc f_n réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[2-n,1]$.
Or $n\geqslant 2$ donc $2-n<0$ donc $0\in[2-n,1]$ donc l'équation $\boxed{f_n(x)=0 \text{ a une unique solution dans } [0,1]}$.

2. u_2 est la solution dans $[0,1]$ de $x^2-2x+1=0$.
$x^2-2x+1=(x-1)^2$ donc la seule solution est 1 donc $\boxed{u_2=1}$.

3. $\forall x\in[0,1],\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{n+1}-(n+1)x+1-(x^n-nx+1)$
$$=x^{n+1}-nx-x+1-x^n+nx-1$$
$$=x^n(x-1)-x$$
Or $0\leqslant x\leqslant 1$ donc $x-1\leqslant 0$ et donc $x^n(x-1)\leqslant 0$ et $-x\leqslant 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant 0}$.
En particulier $\forall n\geqslant 2$, $f_{n+1}(u_n)-f_n(u_n)\leqslant 0$ et comme $f_n(u_n)=0$, on a $f_{n+1}(u_n)\leqslant 0$, soit $f_{n+1}(u_n)\leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$.
Or f_{n+1} est décroissante sur $[0,1]$ et u_n et u_{n+1} sont dans cet intervalle, donc $u_{n+1}\leqslant u_n$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. $f_n(\frac{2}{n})=\left(\frac{2}{n}\right)^n+1-2=\left(\frac{2}{n}\right)^n-1$.
$n\geqslant 2$ donc $\frac{2}{n}\leqslant 1$ donc $\left(\frac{2}{n}\right)^n\leqslant 1$ donc $f_n(\frac{2}{n})\leqslant 0$.
Donc $f_n(\frac{2}{n})\leqslant f_n(u_n)$.
Or f_n est décroissante sur $[0,1]$ et ces deux nombres sont dans $[0,1]$ donc $\boxed{u_n\leqslant\frac{2}{n}}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=0$ et par définition, $\forall n\geqslant 2$, $u_n\geqslant 0$, donc par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$.

5. $(u_n)^n=e^{n\ln(u_n)}$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$.
Donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln(u_n)=-\infty$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^n=0}$.
Par définition, $f_n(u_n)=0$ donc $(u_n)^n+1-nu_n=0$, donc $nu_n=(u_n)^n+1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=1$ donc $\boxed{u_n\sim\frac{1}{n}}$.

Correction 3.

1. (a) Les racines cinquièmes de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $k\in[\![0,4]\!]$.

Donc $\boxed{P=\prod_{k=0}^{4}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)}$

(b) Pour $k=0$, $e^{\frac{2i\times 0\pi}{5}}=1$
Les racines obtenues pour $k=1$ et $k=4$, sont conjuguées : $e^{\frac{8i\pi}{5}}=e^{-\frac{2i\pi}{5}}$.
Idem pour $k=2$ et $k=3$: $e^{\frac{6i\pi}{5}}=e^{-\frac{4i\pi}{5}}$.
Alors
$$\begin{aligned}P&=(X-1)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{6i\pi}{5}}\right)\\&=(X-1)\left(X^2-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)X+e^{\frac{2i\pi}{5}}e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X^2-\left(e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)X+e^{\frac{4i\pi}{5}}e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)\\&=\boxed{(X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right)}\end{aligned}$$
ce qui est la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. $X^5-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ donc $\boxed{Q=X^4+X^3+X^2+X+1}$.

3. Ainsi, $P=(X-1)Q$
Et d'après **1.(b)**, $P=(X-1)(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1)$.
Donc $\boxed{Q=(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1)}$.

4. Ainsi,
$$\begin{aligned}Q&=(X^2-2\alpha X+1)(X^2-2\beta X+1)\\&=X^4-2(\alpha+\beta)X^3+(2+4\alpha\beta)X^2-2(\alpha+\beta)X+1\end{aligned}$$
Les coefficients d'un polynôme sont uniques, donc on peut identifier, et l'on obtient $\begin{cases}-2(\alpha+\beta)=1\\2+4\alpha\beta=1\end{cases}$

donc $\boxed{\alpha+\beta=-\frac{1}{2}}$ et $\boxed{\alpha\beta=-\frac{1}{4}}$.

5. $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}=X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta$.
Or $(X-\alpha)(X-\beta)=X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta$ donc α et β sont les racines de $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$.
$\Delta=\frac{5}{4}$ donc $x_1=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$.
Or $\frac{2\pi}{5}\in[0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\alpha>0$ donc $\boxed{\alpha=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}}$.

Correction 4.

Partie A.

1. g est dérivable sur $[0,+\infty[$ (produit de fonctions usuelles dérivables),
et $\forall x\geqslant 0, g'(x)=-e^x+(-x+2)e^x=(-x+1)e^x$.

x	0		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0)=2e^0-2=2-2=0$

$g(1)=1e^1-2=e-2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-x+2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$
donc par produit (et soustraction de 2), $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

2. $\star$ sur $]0,1[$, $g(x)$ est strictement positif donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur $]0,1[$;
$\star$ sur $[1,+\infty[$: $\star$ g est continue (produit et somme de fonctions usuelles continues)
$\star$ g est strictement décroissante
$\star$ $g(1)=e-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$
Donc d'après le théorème de la bijection, g est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty,e-2]$.
Or $e-2>0$ donc $0\in]-\infty,e-2]$ donc 0 a un unique antécédent par g sur $[1,+\infty[$.

Donc $\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ a une unique solution non nulle}}$.
De plus, $g(1)>0$, $g(2)=-2<0$ et $g(\alpha)=0$, donc $g(1)>g(\alpha)>g(2)$.
Or $1, 2$ et α sont dans $[1,+\infty[$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante donc $\boxed{1<\alpha<2}$.

3. D'après le tableau des variations de g, on déduit :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

Partie B.

1. $\star$ Sur $]0,+\infty[$, f est le quotient de deux fonctions usuelles continues, et $e^x - 1$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

$\star$ En 0 : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc par quotient, $\frac{x^2}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, ce qui est égal à $f(0)$.
Donc f est continue en 0.

$\star$ Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$.
Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$.
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ (et } f'(0) = 1)}$.

2. $e^x - 1 \underset{x\to +\infty}{\sim} e^x$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$). Donc $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$.
Donc, par le théorème des croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$.

3. **(a)** Pour $x > 0$, f est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et $f'(x) = \dfrac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x}{(e^x - 1)^2} g(x)$.
Or sur $]0,+\infty[$, $\dfrac{x}{(e^x - 1)^2} > 0$ donc $\boxed{f'(x) \text{ a le même signe que } g(x)}$.

(b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$f(\alpha)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Partie C.

1. **(a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ par $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{e-1}$
$\frac{1}{e-1} \leqslant 1$ car $e - 1 > 1$ et $\frac{1}{e-1} \geqslant 0$ car $e - 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

f est croissante sur $[0,\alpha]$ et $\alpha > 1$ donc f est croissante sur $[0,1]$.
Donc $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$.
Or $f(0) = 0$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(1) \leqslant 1$.
Donc $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

(b) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

2. **(a)** Pour $x > 0$, $f(x) = x \iff \frac{x^2}{e^x-1} = x \iff x^2 = x(e^x - 1) \iff x = e^x - 1$ (car $x \neq 0$)
Donc $\boxed{f(x) = x \iff e^x - x - 1 = 0}$.

(b) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions usuelles dérivables) et $\forall x > 0, h'(x) = e^x - 1$.
Pour $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]0,\infty[}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et h est strictement croissante, donc $\forall x > 0, h(x) > 0$.

Donc h ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ n'a pas de solution sur }]0, +\infty[}$.

3. On note ℓ la limite de (u_n).
$\star$ (u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
$\star$ f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
$\star$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et la limite est unique, donc $\ell = f(\ell)$.
Or la seule solution de l'équation $f(x) = x$ est 0, donc $\ell = 0$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

Correction 5.

1. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$.
$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \boxed{\frac{7}{2}}$.

2. **(a)** Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, si $(X = k)$ est réalisé, alors on ne lance la pièce qu'une fois, donc $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 0)$ est la probabilité de ne pas faire Pile en un seul lancer de pièce, donc $\boxed{\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{2}.}$

(b) Si $(X = 6)$ est réalisé, alors on lance la pièce deux fois. Pour 2 lancers de pièce, on a $\Omega = \{P, F\}^2$, donc card$(\Omega) = 4$, et une seule issue est favorable à « faire 0 fois Pile » : (F, F). Donc par équiprobabilité, on déduit $\boxed{\mathbf{P}_{(X=6)}(Y = 0) = \frac{1}{4}}$.

(c) Les événements $(X = k)$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$ forment un système complet car le dé ne donne qu'une valeur à la fois, et toujours un entier entre 1 et 6.

Alors la formule des probabilités totales donne :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 0)\\ &= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\\ &= 5 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\\ &= \boxed{\frac{11}{24}}\end{aligned}$$

3. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ (probabilité de faire Pile avec un lancer de pièce).
Et $\mathbf{P}_{(X=6)}(Y = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ car il y a deux issues favorables à l'événement « on obtient 1 fois Pile » en deux lancers : (P, F) et (F, P).
Donc avec la formule des probabilités totales comme au **2.(c)**, on obtient :
$\mathbf{P}(Y = 1) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 2) &= \mathbf{P}((X = 6) \cap (Y = 2)) + \mathbf{P}((X \neq 6) \cap (Y = 2))\\ &= \mathbf{P}(X = 6)\mathbf{P}_{(X=6)}(Y = 2) && \text{car } \mathbf{P}((X \neq 6) \cap (Y = 2)) = 0 \text{ (si } X \neq 6\text{, on ne lance qu'une fois la pièce !)}\\ &= \mathbf{P}(X = 6)\mathbf{P}(\text{« faire deux fois Pile en deux lancers de pièce »})\\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}\\ &= \boxed{\frac{1}{24}}\end{aligned}$$

4. La loi de Y est donnée par $\boxed{Y(\Omega) = \{0, 1, 2\} \text{ et } \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{11}{24}, \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{24}}$.
$E(Y) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{24} = \boxed{\frac{7}{12}}$.
$E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{24} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{24} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.
Donc d'après la formule de König, $V(Y) = \frac{2}{3} - \frac{49}{144} = \frac{96-49}{144} = \boxed{\frac{47}{144}}$.