Devoir Surveillé n°2

Samedi 16 novembre, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Échauffement : on note g la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $g^{-1}([2;4])$, $g^{-1}([\![-1;3]\!])$, $g([-1;2])$, $g^{-1}(g([-1,3]))$ et $g(g^{-1}([-3,5]))$.
on ne demande pas de justification ici

2. Soient A et B deux parties de E.

(a) Rappeler la définition de l'image $f(A)$.

(b) On suppose que $A \subset B$, montrer que $f(A) \subset f(B)$.

3. Dans cette question, A et B sont deux parties de F.

(a) Rappeler la définition de l'image réciproque $f^{-1}(A)$.

(b) On suppose uniquement pour **(b)** que $A \subset B$, montrer que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

(c) Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. Dans cette question, A est une partie de E.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(*pour plus de clarté dans la rédaction, on pourra noter* $A' = f(A)$)

(b) On suppose ici que f est injective, montrer qu'alors $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Exercice 2.

1. Étudier les limites des fonctions suivantes en a (*on attend des justifications soignées*) :

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{3 - x}$ en $a = 3$

(b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ en $a = 0$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\ln(x) - e^x + x^5 - 3}$ en $a = +\infty$

(d) $i(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $a = -\infty$

2. (a) Encadrer $\frac{1}{2-\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos(x)}$.

3. Résoudre les inéquations suivantes : **(a)** $|2x + 4| \leqslant 3$ **(b)** $\dfrac{1}{x+3} \leqslant \dfrac{3}{2x - 1}$

Exercice 3.

1. Soient $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+2 \end{array}$ et $i : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (x;y) & \rightarrow & 2x-y \end{array}$

h et i sont-elles injectives ? surjectives ?

2. Soit $k : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \rightarrow & [2;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+2x+3 \end{array}$.

Montrer que k est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 4.

On définit le polynôme f par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 2x + 3$.

1. Mettre ce polynôme sous la forme canonique.

2. En utilisant cette forme canonique, construire, en expliquant, la représentation graphique de la fonction f, la plus précise possible. On déterminera aussi le point de la courbe d'abscisse 0.

3. En s'appuyant sur la courbe, et si besoin après un calcul, déterminer :
$f(]-\infty,0])$, $f([0,3])$, $f^{-1}([0,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,3[)$

Exercice 5.

On considère la fonction f déterminée sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité choisie étant le centimètre.

Partie A : Étude d'une fonction g auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$.

1. Soit P la fonction polynôme déterminée par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
P est-elle paire ou impaire ?
Étudier le signe de P.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$.

3. En déduire le tableau des variations de g sur son domaine d'étude, avec limites aux bords et extrema éventuels.
g est-elle majorée ? minorée ? Donner le signe de g.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f ?

3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Déterminer la limite de $f(x) - (x+1)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on donner ?

4. **(a)** Calculer $f'(x)$ et en utilisant la partie A., déterminer les variations de f.

(b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f en $x = 1$.

5. Tracer $\mathcal{T}$ et en utilisant tous les éléments dont vous disposez, donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.