

CORRIGÉ DU DS N°2

Correction 1.

$$1. \quad g^{-1}([2; 4]) = [-4, -2] \cup [2, 4] \quad g^{-1}(\llbracket -1; 3 \rrbracket) = \llbracket -3; 3 \rrbracket \quad g([-1, 2]) = [0, 2]$$

$$g([-1, 3]) = [0, 3], \text{ donc } g^{-1}(g([-1, 3])) = [-1, 3]$$

$$g^{-1}([-3, 5]) = [-5, 5] \text{ donc } g(g^{-1}([-3, 5])) = [-3, 5].$$

2. (a) cours !

(b) Soit y dans $f(A)$, montrons que y est dans $f(B)$.

$y \in f(A)$ donc il existe x dans A tel que $y = f(x)$.

$x \in A$ et $A \subset B$ donc $x \in B$, donc $f(x) \in f(B)$.

Donc $y \in f(B)$.

On a donc bien $f(A) \subset f(B)$.

3. (a) cours !

(b) Soit x dans $f^{-1}(A)$, montrons que $x \in f^{-1}(B)$.

$x \in f^{-1}(A)$ donc $f(x) \in A$, et $A \subset B$ donc $f(x) \in B$.

Donc $x \in f^{-1}(B)$.

On a bien montré que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

(c) On procède par double inclusion.

• Montrons que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$x \in f^{-1}(A \cap B)$ donc $f(x) \in A \cap B$.

Donc $f(x) \in A$ donc $x \in f^{-1}(A)$, et $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$.

Donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

On vient de montrer que $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

• Montrons que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.

Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, montrons que $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A)$ donc $f(x) \in A$.

De même, $f(x) \in B$.

Ainsi, $f(x) \in A \cap B$ donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Remarque, on peut aussi dans ce cas raisonner par équivalence :

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \iff f(x) \in A \cap B$$

$$\iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B$$

$$\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B)$$

$$\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. (a) On note $A' = f(A)$, et on va donc montrer que $A \subset f^{-1}(A')$.

Soit $x \in A$, montrons que $x \in f^{-1}(A')$.

$x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$ soit $f(x) \in A'$.

Or x est un antécédent de $f(x)$, donc $x \in f^{-1}(A')$.

Ainsi, on a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) Prenons x dans $f^{-1}(f(A))$.

Alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$.

Or f est injective donc $x = x'$ et donc $x \in A$.

Ainsi, nous avons bien montré que si f est injective, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Correction 2.

1. (a) $\star \lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 11x + 5 = 2 \times 9 - 33 + 5 = -10 < 0$

$\star \lim_{x \rightarrow 3} 3 - x = 0$

$\star m = -1 < 0$ donc si $x < 3$, alors $3 - x > 0$ donc par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty}$

et si $x > 3$, alors $3 - x < 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$.

Et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0}$.

(c) $h(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{e^x(\frac{\ln(x)}{e^x} - 1 + \frac{x^5}{e^x} - \frac{3}{e^x})} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{\ln(x)}{e^x} - 1 + \frac{x^5}{e^x} - \frac{3}{e^x}}$.

$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = 0$ par théorème des croissances comparées, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ (inverse)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} - 1 + \frac{x^5}{e^x} - \frac{3}{e^x} = -1$

$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

Donc, par quotient et produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0}$

(d) $i(x) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 0}$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $1 \geq -\cos(x) \geq -1$ donc $3 \geq 2 - \cos(x) \geq 1$.

Ces trois nombres sont strictement positifs et la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1}$.

(b) Pour $x > -1$, on a $x + 1 > 0$, donc d'après le résultat précédent, on obtient $\frac{x+1}{3} \leq \frac{x+1}{2 - \cos(x)}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$ donc par comparaison, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos(x)} = +\infty}$.

3. (a) $|2x + 4| \leq 3 \iff -3 \leq 2x + 4 \leq 3$

$\iff -7 \leq 2x \leq -1$

$\iff -\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]}$.

(b) $\frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{2x-1} \iff \frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} \leq 0$
 $\iff \frac{2x-1-3(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \leq 0$
 $\iff \frac{-x-10}{(x+3)(2x-1)} \leq 0$

$-x-10 \leq 0 \iff -10 \leq x$ et $x+3 \leq 0 \iff x \leq -3$ et $2x-1 \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-10	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-x - 10$		+	0	-	-
$x + 3$		-	-	0	+
$2x - 1$		-	-	-	0
$\frac{-x-10}{(x+3)(2x-1)}$		+	0	-	

Donc $\mathcal{S} = [-10; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Correction 3.

- Soient n et n' dans $\mathbb{Z}$, on suppose que $h(n) = h(n')$.
Alors $3n + 2 = 3n' + 2$ donc $3n = 3n'$ et finalement $n = n'$.
Donc h est injective.
 - h n'est pas surjective : en effet, $3n + 2 = 0 \iff n = -\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ donc 0 n'a pas d'antécédent par h .
 - $i(1, 1) = 2 - 1 = 1$ et $i(0, -1) = 0 - (-1) = 1$ donc i n'est pas injective.
 - Soit n dans $\mathbb{Z}$, en posant $(x, y) = (0, -n)$, on a $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $i(x, y) = 2x - y = 2 \times 0 - (-n) = n$.
Donc n a un antécédent par i .
Donc i est surjective.
- Soit y dans $[2, +\infty[$. On résout $k(x) = y$ en cherchant x dans $[-1, +\infty[$.
 $k(x) = y \iff x^2 + 2x + 3 = y \iff x^2 + 2x + (3 - y) = 0$.
 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (3 - y) = 4 - 12 + 4y = 4(y - 2)$.
 $y \geq 2$ donc $\Delta \geq 0$.
Si $y = 2$, $\Delta = 0$ la seule solution pour x est $\frac{-2}{2 \times 1} = -1$ qui est bien dans $[-1, +\infty[$.
Si $y > 2$, alors $\Delta > 0$ il y a deux racines réelles :
 $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4(y-2)}}{2} = -1 - \sqrt{y-2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{y-2}$.
On a $x_1 < -1 < x_2$, donc il y a bien une unique solution dans $[-1, +\infty[$, c'est $x = x_2$.
(pour $y = 2$, $-1 + \sqrt{y-2} = -1$ donc la formule convient aussi pour cette valeur)

Donc k est bijective, et $k^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$
 $y \mapsto -1 + \sqrt{y-2}$

Correction 4.

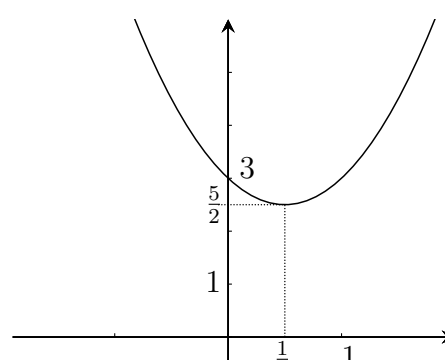
- $$f(x) = 2(x^2 - x) + 3$$

$$= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 3$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

La forme canonique du polynôme est $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

- 

D'après la forme canonique, on part de la parabole x^2 , on la décale horizontalement de $\frac{1}{2}$, on l'étire vers le haut (multiplication par 2), puis on la décale vers le haut de $\frac{5}{2}$.
Le minimum est donc en $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$.
 $f(0) = 2 \times 0^2 + -2 \times 0 + 3 = 3$.
Donc la courbe passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.

3. $f(]-\infty, 0]) = [3, +\infty[$
 $f(3) = 2 \times 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 15$ donc $f([0, 3]) = [\frac{5}{2}, 15]$
 $f^{-1}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$
 $f(x) = 3 \iff 2x^2 - 2x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$
 Donc d'après la courbe $f^{-1}(]-\infty, 3]) =]0; 1[.$

Correction 5.

Partie A : Étude d'une fonction g auxiliaire

1. $P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$ et $P(-1) = 3 \times (-1)^3 + 1 - 2 = -4.$
 $P(1) \neq P(-1)$ donc P n'est pas paire et $-P(1) \neq P(-1)$ donc P n'est pas impaire.
 $P(1) = 0$ donc P est factorisable par $x - 1.$
 Par division euclidienne ou identification des coefficients, on trouve $P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2).$
 $3x^2 + 3x + 2 : \Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = -15 < 0$ et $a = 3 > 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 3x + 2 > 0$
 donc $P(x)$ est du signe de $x - 1$, c'est-à-dire $P(x) < 0$ pour $x < 1$ et $P(x) > 0$ pour $x > 1.$
2. $g'(x) = 3x^2 - 1 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{(3x^2 - 1) \times x - 2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{P(x)}{x}.$
3. • $g(1) = 1^3 - 1 + 3 - 2 \ln(1) = 3$
 • limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - x + 3 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln(x) = +\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$
 • limite en $+\infty$: $g(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} - 2 \frac{\ln(x)}{x^3}\right)$
 * $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissances comparées,
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} - 2 \frac{\ln(x)}{x^3} = 1$
 * $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
 Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$
 • Donc
- | | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | - | 0 + |
| $g(x)$ | $+\infty$ | | $+\infty$ |
- $x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $P(x)$
- g n'est pas majorée (sa limite en $+\infty$ est $+\infty$) et elle est minorée par 3.
 • $3 > 0$ donc pour tout $x \in]0; +\infty[, g(x) > 0.$

Partie B : Étude de la fonction f

1. $f = u + \frac{v}{w}$ avec $u(x) = x + 1, v(x) = x - 1 + \ln(x)$ et $w(x) = x^2.$
 * u est affine, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 * v est une somme d'une fonction affine avec $\ln$ donc définie et dérivable sur $]0, +\infty[$
 * w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 * $w(x) = 0 \iff x = 0$
 Donc f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[.$
2. $\left. \begin{array}{l} \star \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 + \ln(x) = -\infty \\ \star \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \star x^2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ donc par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2} = -\infty$
 De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \star \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\
 & \star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \text{ (somme)} \\
 & \star \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ par le théorème sur les croissances comparées}
 \end{aligned} \right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.
 \end{aligned}$$

$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$, donc d'après ce qui précède, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$.

On peut en déduire qu'en $+\infty$, la courbe de f et la droite d'équation $y = x + 1$ sont très proches (la droite est une asymptote oblique).

4. (a) On a $v(x) = x - 1 + \ln(x)$, alors $v'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, et $w(x) = x^2$, alors $w'(x) = 2x$ et on utilise $\left(\frac{v}{w}\right)' = \frac{v'w - vw'}{w^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } f'(x) &= 1 + \frac{(1 + \frac{1}{x})x^2 - (x - 1 + \ln(x))2x}{x^4} \\
 &= \frac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln(x)}{x^4} \\
 &= \frac{x^4 - x^2 + 3x - 2x \ln(x)}{x^4} \\
 &= \frac{x^3 - x + 3 - 2 \ln(x)}{x^3} \\
 &= \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

On sait par **A.3.** que $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, ainsi comme $x^3 > 0$ aussi sur $]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ sur son ensemble de définition. Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) Une équation est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
 $f'(1) = \frac{g(1)}{1^3} = 3$ et $f(1) = 1 + 1 + \frac{1 - 1 + \ln(1)}{1^2} = 2 + \frac{0}{1} = 2$
 $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 3x - 1$.

5.

