Devoir Surveillé n°1

Samedi 28 septembre, 8h - 11h

Calculatrice interdite.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

1. Déterminer les images des nombres a, b et c par f et par g :
$f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1+x}{x - \frac{2}{x}}$ et $a = -2$, $b = \dfrac{2}{3}$ et $c = \sqrt{3} - 1$.

2. Simplifier $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ et $\dfrac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}$.

3. Démontrer les égalités suivantes valables pour tous les réels x :
(a) $\cos(2x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$ **(b)** $\sin(3x) = 4\sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'angle orienté $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ soit égal à $-\dfrac{\pi}{4}$, et $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 5$. Calculer : $\det(2\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}; \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}).(-3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$.

Exercice 2.

Tracer l'allure des courbes des fonctions suivantes.
On indiquera les points remarquables principaux (au moins 2 pour chaque courbe).
$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ $g(x) = 3\sin(x + \frac{\pi}{4})$ $h(x) = -\cos(\pi x)$

Exercice 3.

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère les points $A(-1,-1)$, $B(3,2)$ et $C(-4,3)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

3. Déterminer les coordonnées du point G, isobarycentre de A, B et C.

4. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

5. Soit $\overrightarrow{u} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

(a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe du plan.

(b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\jmath}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 4.

Soient A, B et C trois points du plan qui forment un triangle non aplati.
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, et $p = \frac{a+b+c}{2}$, et enfin $\mathcal{A}$ sera l'aire du triangle ABC.
Le but de l'exercice est d'établir une formule pour l'aire à partir des longueurs des côtés.

1. Justifier que l'aire du triangle ABC est, au signe près, $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
En déduire que $\mathcal{A} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)^2}$.

2. En calculant de deux manières différentes $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$, démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

3. Démontrer que $(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2 + (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = b^2c^2$.

4. En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

5. Application : on donne $AB = 5$cm, $BC = 7$cm et $AC = 8$cm, donner la valeur exacte de l'aire du triangle.

Bonus : Démontrer que $\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \dfrac{\sin(\widehat{ABC})}{b} = \dfrac{\sin(\widehat{BCA})}{c}$.

Exercice 5.

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace, m un réel, et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2m \\ m+3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-m \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer, les valeurs de m telles que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient ...

1. ... colinéaires.

2. ... orthogonaux.

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$

2. $\cos(3x) + \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$ (*on pourra mettre le membre de gauche sous forme $A\cos(\omega x - \varphi)$*)

Exercice 7.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(3x+2) \times \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad g(x) = \left(\dfrac{7x-5}{3x+4}\right)^3$ $\qquad h(x) = \dfrac{\sqrt{-2x+7}}{x-3}$