Corrigé du DM n°9

Correction 1.

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$.
Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est symétrique par rapport à l'origine}}$.

2. Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$, ce qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ car $x+1 \neq 0$ sur cet intervalle, et alors $f'(x) = \frac{1(1+x)-x\times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$.
Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
De plus, $f(0) = 0$ et pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$.
Donc, en utilisant l'imparité de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Attention : *la valeur absolue n'est pas dérivable en 0, et sa dérivée ailleurs n'est pas usuelle : on ne la dérive pas ! Il suffit de distinguer des cas selon le signe de l'expression qu'elle entoure pour pouvoir l'enlever. Ici $f(x)$ a deux expressions : pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et pour $x \leqslant 0$, $f(x) = \frac{x}{1-x}$, dans chacun des deux cas, on peut alors dériver.*

3. $\star$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\star$ d'après le tableau des variations $f(]-\infty, +\infty[) =]-1; 1[$.
Donc, $\boxed{\text{avec} J =]-1; 1[,\ f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J}$.

4. Pour $y \in [0, 1[$, on voit d'après le tableau des variations que son antécédent x est dans $[0, +\infty[$.
Donc pour $y \in [0, 1[$ et $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x}{1+x} = y \\ &\iff x = y(x+1) \\ &\iff x = yx + y \\ &\iff x(1-y) = y \\ &\iff x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

Donc pour $y \in [0, 1[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.
Pour $y \in]-1, 0[$, l'antécédent est dans $]-1; 0[$.
Donc pour $y \in]-1; 0[$ et $x \in]-\infty, 0[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x}{1-x} = y \\ &\iff \dots \\ &\iff x = \frac{y}{1+y} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour } y \in]-1; 1[,\ f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}}$.

Correction 2.

1. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$.
$\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ (polynôme) et $D_{\sqrt{}} = [0, +\infty[$ donc f est définie pour tous les x tels que $u(x) \geqslant 0$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 < 0$ donc pas de racine réelle, et $a = 1 > 0$ donc $u(x)$ est toujours positif, donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x - 1$ aussi donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) &= f(-x-1)\\ &= \sqrt{(-x-1)^2+2(-x-1)+2}\\ &= \sqrt{x^2+2x+1-2x-2+2}\\ &= \sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

Et $g(x) = \sqrt{(x-1)^2+2(x-1)+2} = \sqrt{x^2-2x+1+2x-2+2} = \sqrt{x^2+1}$.

Donc $\boxed{g \text{ est paire}}$.

Donc la courbe de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Or la courbe de g est obtenue à partir de celle de f par translation de vecteur $\overrightarrow{\imath}$ donc pour obtenir la courbe de f à partir de celle de g, on fait une translation de vecteur $-\overrightarrow{\imath}$, et l'axe de symétrie est donc translaté également, donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ a comme axe de symétrie, la droite } x=-1}$.

3. On étudie f sur $[-1,+\infty[$ et on obtiendra l'autre partie par symétrie.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la racine est dérivable sur $]0,+\infty[$. Or $u(x)$ est toujours strictement positif, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ ce qui est strictement positif sur $]-1,+\infty[$.

On a donc

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

$\star$ $f(-1) = \sqrt{(-1)^2+2\times(-1)+2} = \sqrt{1} = 1$

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4.

```
from math import *

abscisses=[-6]
x=-6
while x<=6:
   x+=0.1
   abscisses.append(x)


def f(x):
    return math.sqrt(x**2+2*x+2)

ordonnees=[]
for x in abscisses:
    ordonnees.append(f(x))
```

Beaucoup de possibilités différentes. Éviter toutefois `numpy` qui n'est a priori pas au programme. On peut en revanche utiliser des compréhensions de liste, notamment pour les ordonnées : `ordonnees=[f(x) for x in abscisses]`

Correction 3.

On note I l'ensemble de définition de f, et J son ensemble d'arrivée.

On veut montrer que $\forall y \in J, f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Soit $y \in J$: on note $x = f^{-1}(y)$, on a ainsi $f(x) = y$.

Alors $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x))$, or f est impaire donc $-f(x) = f(-x)$,

donc $f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$.

Donc $\boxed{f \text{ est bien impaire}}$.