Corrigé du DM n°8

Correction 1.

$\boxed{f}$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ et de même, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}}$.
- $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} 2x+1 = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3} > 0$

  $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x-1 = 0$

  $\star$ $3x-1>0 \iff 3x>1 \iff x>\frac{1}{3}$ donc

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	$-$	0	$+$

  Donc par la règle du quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty}$.
- La courbe de f a une asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$ d'équation $y=\frac{2}{3}$, et une asymptote verticale d'équation $x=\frac{1}{3}$.

$\boxed{g}$

- $\displaystyle g(x) = \frac{x^2-1}{(3x)^2-2\times 3x+1} = \frac{x^2-1}{9x^2-6x+1}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{9x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$

  et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{9x^2} = \boxed{\frac{1}{9}}$
- $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} x^2-1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{9} < 0$

  $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} (3x-1)^2 = 0$

  $\star$ $(3x-1)^2 \geqslant 0$

  Donc par la règle du quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} g(x) = -\infty}$.
- La courbe de g a une asymptote verticale d'équation $x=\frac{1}{3}$ et une asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$ d'équation $y=\frac{1}{9}$.

$\boxed{h}$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{3x} = \lim_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$ et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$.
- $\frac{1}{3}$ est racine du numérateur, par division euclidienne ou identification des coefficients, on obtient $3x^2-7x+2 = (x-\frac{1}{3})(3x-6)$.

  Donc $\displaystyle h(x) = \frac{(x-\frac{1}{3})(3x-6)}{3(x-\frac{1}{3})} = \frac{3x-6}{3} = x-2$

  Donc $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} = x-2 = \boxed{-\frac{5}{3}}$.

Correction 2.

1. $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2x-\frac{1}{x} = -\infty$ (somme)

$\star$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-3x+1} = +\infty$

e^{-3x+1} est une composée !

Donc par produit, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(2x-\frac{1}{x}\right)e^{-3x+1} = -\infty}$

2. $\forall x\in\mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x-1) \leqslant 1$ et donc pour $x>1$, $\frac{-1}{x-1} \leqslant \frac{\sin(x-1)}{x-1} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 0}$.

3. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

Et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}}$

4. $\dfrac{x+e^x}{x^2+12} = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{12}{x^2}}$.

on factorise le numérateur par son terme dominant, et le dénominateur par son terme dominant

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ (croissances comparées)

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{12}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{12}{x^2}} = 1$

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+e^x}{x^2+12} = +\infty}$.

5. $\dfrac{\sin(23x)}{x} = \dfrac{\sin(23x)}{23x} \times 23$

c'est une composée !

Or $\lim\limits_{x\to 0} 23x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$ (taux d'accroissement)

Donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(23x)}{23x} = 1$.

Donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(23x)}{x} = 23}$.

6. $\left(2x - \frac{1}{x}\right) e^{-3x+1} = 2xe^{-3x+1} - \frac{1}{x} \times e^{-3x+1} = 2e^{-2x+1} \times \frac{x}{e^x} - \frac{1}{x} \times e^{-3x+1}$

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par le théorème des croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x+1} = 0$

donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-2x+1} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x+1} = 0$

donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} e^{-3x+1} = 0$

Donc par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) e^{-3x+1} = 0}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$ quantité conjuguée puis simplification par $\sqrt{x}$

Correction 3.

- $f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 = 1$ et $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$
  Donc $f(1) \neq f(-1)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas paire}}$.
  $f(2) = 8 + 4 - 1 = 11$ et $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 1 = -8 + 4 - 1 = -5$
  Donc $f(-2) \neq -f(2)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas impaire}}$.

- Pour g : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \sin(5\times(-x)) + (-x)\times\cos(-x) = -\sin(5x) - x\cos(x)$ (car sin est impaire et cos est paire), donc $g(-x) = -(\sin(5x) + x\cos(x)) = -g(x)$
  Donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

- $h(\frac{\pi}{3}) = \cos(0) = 1$ et $h(-\frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
  Donc $h(\frac{\pi}{3}) \neq h(-\frac{\pi}{3})$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas paire}}$ et $h(-\frac{\pi}{3}) \neq -h(\frac{\pi}{3})$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas impaire}}$.