Devoir Maison n°7
pour <u>Lundi</u> 4 novembre à 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Profitez de ce devoir pour prendre le temps d'aller chercher dans le cours pour retrouver et réviser (ou apprendre) les définitions, théorèmes et propriétés qui pourraient être utiles.

Les vacances sont aussi le moment de faire le point sur l'organisation du travail, les méthodes d'apprentissage ...

Il est important à ce stade d'évaluer vos méthodes pour s'assurer qu'elles sont efficaces.

Il est essentiel aussi de prendre du temps de détente et de repos !

Exercice 1.

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ x+2 \\ 2x \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs de x pour que :

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient orthogonaux.

2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

3. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires.

4. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires.

Exercice 2.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n+2 \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}.$

1. Déterminer $f(\llbracket 0;4 \rrbracket)$, $f^{-1}(\llbracket -2;3 \rrbracket)$ et $g(\llbracket 0;4 \rrbracket)$.

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 3.

On définit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{3-x} \end{array}$.

Montrer que l'application g est une bijection et déterminer son application réciproque.

Exercice 4.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$

Exercice 5.

Déterminer, en justifiant, les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

$f(x) = \ln(-2x^3 - 9x^2 - 3x + 4) \qquad g(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)} \qquad h(x) = \frac{1}{x^2-2} \times e^x$

Parmi les exercices suivants, traiter (au moins) un exercice avec ★ et (au moins) un exercice sans ★, au choix.

Exercice 6. dérivées

Dériver les fonctions suivantes, sans se préoccuper de l'ensemble de dérivabilité.

$f(x) = \dfrac{x^3-2}{5x^2+1}$ $\quad h(x) = \ln\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$ $\quad l(x) = 4\sqrt{\dfrac{3x-1}{x+8}}$

$g(x) = \sin^4(5-3x)$ $\quad k(x) = (x^2+1)e^{2x-1}$

Exercice 7. inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-x^2+2x-1 > 1$

(b) $\dfrac{2x+1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$

(c) $1 + x \geqslant \dfrac{1}{x}$

(d) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x+8}{x+2} \leqslant \dfrac{16}{x^2-4}$

Exercice 8. calculs et polynômes

Factoriser dans $\mathbb{R}$ (le plus efficacement possible) les expressions suivantes :

$f(x) = 4x^2 - 7x$
$g(x) = x(3x+4) - x(-2x+5)$
$h(x) = -x^2 - 3x + 4$
$i(x) = 2x^3 - \dfrac{16}{3}x^2 - 2x$
$j(x) = (x-3)x^2 + x - 3$
$k(x) = 4x^2 - 4x + 1$
$\ell(x) = x(2x-1) + (2x-1)(3x^2-7)$
$m(x) = 7x^2 - 14x - 21$
$n(x) = 4x^2 - 9$

Exercice 9. vecteurs

1. $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est une base orthonormée directe du plan.

On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, justifier que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est aussi une base orthonormée directe.

2. On donne $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Exercice 10. trigonométrie

Résoudre : $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(4x)$ et $2\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

★ Exercice 11. trigonométrie

On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. **(a)** Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide des formules de duplication.

(b) Calculer $(1+\sqrt{5})^2$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ peut s'écrire plus simplement $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. En remarquant que $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$, déterminer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

★ Exercice 12. polynômes

On veut résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation :

$$(E_m) \qquad x^2 + (m+2)x + 9 = 0$$

1. Résoudre l'équation dans chacun des cas suivants :
(a) si $m = 0$ **(b)** si $m = 4$ **(c)** si $m = 5$

2. On revient au cas général où m est quelconque.

(a) Calculer le discriminant Δ_m de l'équation (E_m).

(b) Étudier le signe de Δ_m en fonction de m.

(c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E_m) selon les valeurs du paramètre m.

★ Exercice 13. applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des bijections.
Montrer que $g \circ f$ est une bijection de E dans G.
Justifier que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

★ Exercice 14. ensembles

A et B sont deux parties d'un ensemble E.
On rappelle que $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
En utilisant les règles de calcul avec les unions, intersections et complémentaires, démontrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Bon courage pour ce devoir et bonnes vacances !