Corrigé du DM n°7

Correction 1.

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 2 + x^2 + 2x + 4x = x^2 + 6x + 2$.
$\Delta = 28 = 4 \times 7$ donc $x_1 = -3 + \sqrt{7}$ et $x_2 = -3 - \sqrt{7}$.
Donc $\boxed{\text{les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont orthogonaux sont } -3+\sqrt{7} \text{ et } -3-\sqrt{7}}$.

2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2$ donc $\boxed{\text{aucune valeur de } x \text{ ne peut faire que } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ soient orthogonaux}}$.

3. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Or $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2x^2 - 2x - 4 \\ 4 - 2x \\ 2 - x \end{pmatrix}$
$4 - 2x = 0 \iff x = 2$
$2 - x = 0 \iff x = 2$
et 2 est aussi solution de $2x^2 - 2x + 4 = 0$.
Donc $\boxed{\text{la seule valeur de } x \text{ pour laquelle } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont colinéaires est } 2}$.

4. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \ldots = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.
On note P ce polynôme.
$P(2) = \ldots = 0$, donc $(x-2)$ divise P.
on pose la division euclidienne ou on procède par identification des coefficients
$P(x) = (x-2)(-2x^2 - 2x - 1)$ or pour $-2x^2 - 2x - 1$, on trouve $\Delta < 0$ donc P n'a qu'une racine réelle c'est 2.
Donc $\boxed{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires si et seulement si } x = 2}$.

Correction 2.

1. • $f(⟦0;4⟦)$ est l'ensemble des images de 0, 1, 2 et 3 par l'application f.
$f(0) = 2,\ f(1) = 3,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5$ donc $\boxed{f(⟦0;4⟦) = ⟦2;5⟧}$

• $f^{-1}(⟦-2;3⟧)$ est l'ensemble des antécédents de -2, -1, 0, 1, 2 et 3 par f
f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc -2 et -1 n'ont pas d'antécédent par f.
$f(n) = 0 \iff n + 2 = 0 \iff n = -2$ mais -2 n'est pas dans l'ensemble de définition de f donc 0 n'a pas non plus d'antécédent par f.
De même pour 1.
$f(n) = 2 \iff n + 2 = 2 \iff n = 0$, et $f(n) = 3 \iff n + 2 = 3 \iff n = 1$.
Donc $\boxed{f^{-1}(⟦-2;3⟧) = \{0;1\}}$.

• $g(0) = 0$, $g(1) = 1 - 1 = 0$, $g(2) = 2 - 1 = 1$ et $g(3) = 3 - 1 = 2$ donc $\boxed{g(⟦0;4⟦) = ⟦0,2⟧}$.

2. • Soient n et n' dans $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$.
Alors $n + 2 = n' + 2$ donc $n = n'$.
Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Nous avons vu que 0 n'avait pas d'antécédent par f, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

• pour g :
$g(0) = 0$ et $g(1) = 0$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$.

Soit y dans $\mathbb{N}$, déterminons n dans $\mathbb{N}$ tel que $g(n) = y$.
$y \in \mathbb{N}$ donc $y + 1$ est dans $\mathbb{N}$ et $y + 1 \geqslant 1$, donc $g(y+1) = (y+1) - 1 = y$.
Ainsi, en posant $n = y + 1$, on a $g(n) = y$.
Donc tout y de $\mathbb{N}$ a (au moins) un antécédent, donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

3. $f\circ g(0)=f(g(0))=f(0)=2$ et pour $n\geqslant 1$, $f\circ g(n)=f(g(n))=f(n-1)=(n-1)+2=n+1$

Donc $\boxed{f\circ g(n)=\begin{cases}2 & \text{si } n=0\\ n+1 & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $g\circ f(n)=g(n+2)=(n+2)-1$ (car $n+2\geqslant 1$) donc $\boxed{f\circ g(n)=n+1}$.

Correction 3.

Soit y dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on résout $g(x)=y$ en cherchant x dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$:

$$\begin{aligned} g(x)=y &\iff \frac{x+2}{3-x}=y\\ &\iff x+2=y(3-x) \text{ car } x\neq 3\\ &\iff x+2=3y-yx\\ &\iff x+yx=3y-2\\ &\iff x(1+y)=3y-2\\ &\iff x=\frac{3y-2}{y+1} \text{ car } y\neq -1\end{aligned}$$

On vérifie que la solution trouvée n'est pas égale à 3 : $\frac{3y-2}{y+1}=3\iff 3y-2=3y+3\iff -2=3$ ce qui n'est pas vrai, donc la solution est bien différente de 3.

Donc, pour $y\neq -1$, l'équation $g(x)=y$ a une unique solution dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, donc tout réel différent de -1 a un unique antécédent par l'application g.

Donc $\boxed{g \text{ est une bijection et } g^{-1}: \begin{array}{rcl}\mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{3\}\\ y & \mapsto & \dfrac{3y-2}{y+1}\end{array}}$.

Correction 4.

- Montrons que f est injective : soient n et n' dans $\mathbb{N}$, on suppose que $f(n)=f(n')$.
  Alors $n^2=n'^2$ et comme n et n' sont positifs, cela implique que $n=n'$.
  Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.
  f n'est pas surjective : 2 est un entier naturel mais il n'a pas d'antécédent par f car $n^2=2$ n'a pas de solution entière (les seules solutions réelles sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$).
  Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.
- $g(1,2)=1-2=-1$ et $g(2,3)=2-3=-1=g(1,2)$, donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$.
  Montrons que g est surjective : soit z dans $\mathbb{R}$, alors $g(z,0)=z-0=z$ donc $(z,0)$ est un antécédent de z par g.
  Donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

Correction 5.

- $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=-2x^3-9x^2-3x+4$, polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
  Donc f est définie et dérivable pour tous les x tels que $u(x)>0$. .
  On cherche les racines de u pour pouvoir résoudre l'inéquation.
  $u(-1)=-2\times(-1)^3-9\times(-1)^2-3\times(-1)+4=2-9+3+4=0$.
  Donc on peut diviser u par $x+1$.
  par division euclidienne ou identification des coefficients, on trouve : $u(x)=(x+1)(-2x^2-7x+4)$.
  On étudie $-2x^2-7x+4$: $\Delta=81, x_1=-4$ et $x_2=\frac{1}{2}$, et $a=-1<0$.
  On en déduit :

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$-2x^2-7x+4$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

  Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur }]-\infty,-4[\cup]-1,\tfrac{1}{2}[}$

- $g(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=(x+1)(x+3)$.
  u est un produit de fonctions affines, défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction racine carrée est définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.
  Or

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc $\boxed{\mathcal{D}_g=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[\text{ et } g \text{ est dérivable sur }]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[}$.

- $h(x)=u(x)\times e^x$ avec $u(x)=\frac{1}{x^2-2}$.
  ⋆ u est une fraction rationnelle, et $x^2-2\neq 0 \iff x\neq-\sqrt{2}$ et $x\neq\sqrt{2}$.
  Donc u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.
  ⋆ La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}}$.

Correction 6. réponses

$$f'(x)=\frac{5x^4+3x^2+20x}{(5x^2+1)^2}$$
$$g'(x)=-12\cos(5-3x)\sin^3(5-3x)$$
$$h'(x)=\frac{6x^3+1}{3x^4-x}$$
$$k'(x)=(2x^2+2x+2)e^{2x-1}$$
$$\ell'(x)=\frac{50}{(x+8)\sqrt{(x+8)(3x-1)}}$$

Correction 7.

(a) $-x^2+2x-1>1 \iff -x^2+2x-2>0$
Pour $-x^2+2x-2$: $\Delta=4-8<0$ or $a=-1<0$ donc le polynôme $-x^2+2x-2$ est toujours strictement négatif donc $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.

(b) $\frac{2x+1}{x+1}\leqslant\frac{1}{2x+1} \iff \frac{2x+1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\leqslant 0$

$$\iff \frac{(2x+1)(2x+1)-(x+1)}{(2x+1)(x+1)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{4x^2+4x+1-x-1}{(2x+1)(x+1)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{4x^2+3x}{(2x+1)(x+1)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{x(4x+3)}{(2x+1)(x+1)}\leqslant 0$$

Les fonctions affines sont toutes croissantes, donc sur les 4 lignes, nous aurons « $-0+$ ».

x	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x(4x+3)}{(2x+1)(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$4x+3=0 \iff 4x=-3 \iff x=-\frac{3}{4}$
$2x+1=0 \iff 2x=-1 \iff x=-\frac{1}{2}$
$x+1=0 \iff x=-1$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-1,-\frac{3}{4}]\cup]-\frac{1}{2},0]}$.

(c) $1+x\geqslant\frac{1}{x} \iff 1+x-\frac{1}{x}\geqslant 0 \iff \frac{x+x^2-1}{x}\geqslant 0$
Pour le polynôme x^2+x-1 :
$\Delta=1+4=5$ donc $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et $a=1>0$ donc « $+0-0+$ ».

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{x+x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right[\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[}$.

(d) $\frac{x}{x-2} - \frac{x+8}{x+2} \leqslant \frac{16}{x^2-4} \iff \frac{x(x+2)-(x+8)(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{16}{x^2-4} \leqslant 0$

$\iff \frac{x^2+2x-(x^2+8x-2x-16)-16}{x^2-4} \leqslant 0$

$\iff \frac{-4x}{x^2-4} \leqslant 0$

Or $x^2-4<0 \iff x^2<4 \iff -2<x<2$.

Donc

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-4x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
x^2-4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{-4x}{x^2-4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-2;0]\cup]2,+\infty[}$.

Correction 8.

- $\boxed{f(x)=x(4x-7)}$
- $g(x)=x\Big((3x+4)-(-2x+5)\Big)=x(3x+4+2x-5)=\boxed{x(5x-1)}$
- h : *on peut calculer* $\Delta\ldots$, *ou alors* $h(1)=-1-3+4=0$
  Or le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}=-4$ donc l'autre racine est -4.
  Donc $\boxed{h(x)=-(x-1)(x+4)}$.
- $i(x)=2x(x^2-\frac{8}{3}x-1)$.
  Pour $x^2-\frac{8}{3}x-1$: $\Delta=(-\frac{8}{3})^2-4\times1\times(-1)=\frac{64}{9}+\frac{36}{9}=\frac{100}{9}=(\frac{10}{3})^2$
  donc $x_1=\frac{\frac{8}{3}-\frac{10}{3}}{2}=-\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{\frac{8}{3}+\frac{10}{3}}{2}=3$.
  Donc $\boxed{i(x)=2x(x+\frac{1}{3})(x-3)}$.
- $\boxed{j(x)=(x-3)(x^2+1)}$
- $k(x)=(2x)^2-2\times1\times2x+1^2=\boxed{(2x-1)^2}$
- $\ell(x)=(2x-1)\Big(x+(3x^2-7)\Big)=(2x-1)(3x^2+x-7)$
  Et pour $3x^2+x-7$: $\Delta=1-4\times(-7)\times3=85$ donc $x_1=\frac{-1-\sqrt{85}}{6}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{85}}{6}$
  Donc $\boxed{\ell(x)=3(2x-1)(x+\frac{1+\sqrt{85}}{6})(x+\frac{1-\sqrt{85}}{6})}$
- $m(x)=7(x^2-2x-3)$: $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16$ donc $x_1=\frac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\frac{2+4}{2}=3$
  Donc $\boxed{m(x)=7(x+1)(x-3)}$.
- $n(x)=(2x)^2-3^2=\boxed{(2x-3)(2x+3)}$

Correction 9.

1. ⋆ $\|\overrightarrow{u}\|^2=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $\|\overrightarrow{u}\|=1$.

⋆ De même, $\|\overrightarrow{v}\|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $\|\overrightarrow{v}\|=1$.

⋆ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

⋆ $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}=1>0$ donc l'angle orienté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est entre 0 et π.

Donc $\boxed{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\text{ est une base orthonormée directe}}$.

2. $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}=3\times\frac{1}{\sqrt{2}}-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \overrightarrow{w} \text{ dans la base } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ sont } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

Correction 10.

- $$\begin{aligned} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(4x) &\iff \cos(2x) = \sin(4x) \\ &\iff \cos(2x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - 4x) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \tfrac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\tfrac{\pi}{2} + 4x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 6x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -2x = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \tfrac{\pi}{12} + \tfrac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \tfrac{\pi}{4} - k\pi \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

  On pouvait aussi procéder ainsi :

  $$\begin{aligned} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(4x) &\iff \cos(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \\ &\iff \cos(2x)(1 - 2\sin(2x)) = 0 \\ &\iff \cos(2x) = 0 \text{ ou } 1 - 2\sin(2x) = 0 \\ &\iff \dots \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2\cos(3x - \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2} &\iff \cos(3x - \tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos(3x - \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 3x - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x - \tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \tfrac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Correction 11.

1. (a) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ donc $\cos(\frac{2\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 1$

donc $\cos^2(\frac{\pi}{5}) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\frac{2\pi}{5}) + 1\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5} - 1 + 4}{4} = \dfrac{\sqrt{5} + 3}{8}$.

Or $\frac{\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{5}) \geqslant 0$ donc $\boxed{\cos(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5} + 3}{8}}}$.

(b) $(1 + \sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5} = \boxed{2(3 + \sqrt{5})}$.

Donc $\cos(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\dfrac{(1 + \sqrt{5})^2}{16}} = \boxed{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}}$

2. $\cos^2(\frac{\pi}{5}) + \sin^2(\frac{\pi}{5}) = 1$ donc $\sin^2(\frac{\pi}{5}) = 1 - \dfrac{\sqrt{5} + 3}{8} = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}$.

Or $\sin(\frac{\pi}{5}) \geqslant 0$ car $\frac{\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Donc $\boxed{\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}}$.

3. $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5}) = \boxed{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$ et $\sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{5}) = \boxed{\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}}$

Correction 12.

1. (a) Si $m = 0$, $(E_0) : x^2 + 2x + 9 = 0$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 9 = 4 - 36 = -32 = (4\sqrt{2}i)^2$:

$\boxed{\text{pas de solution réelle, deux solutions complexes : } -1 - 2\sqrt{2}i \text{ et } -1 + 2\sqrt{2}i}$

(b) Si $m = 4$, $(E_4) : x^2 + 6x + 9 = 0$.

$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 0$: $\boxed{\text{une solution } -\frac{6}{2} = -3}$

(c) Si $m=5$, $(E_5): x^2+7x+9=0$.
$\Delta = 7^2-4\times 9 = 13$: deux racines réelles $\boxed{x_1 = \frac{-7-\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-7+\sqrt{13}}{2}}$.

2. **(a)** $\Delta_m = (m+2)^2 - 4\times 1\times 9 = m^2+4m+4-36 = \boxed{m^2+4m-32}$

(b) Δ_m est un polynôme du second degré en m : $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-32) = 144 = 12^2$
$m_1 = \frac{-4-12}{2} = -8$ et $m_2 = \frac{-4+12}{2} = 4$.
$a=1>0$ donc $\boxed{\Delta_m > 0 \text{ pour } m \in]-\infty,-8[\cup]4,+\infty[\text{ et } \Delta_m < 0 \text{ pour } m \in]-8,4[}$

(c) Donc $\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } m \in]-\infty,-8[\cup]4,+\infty[,\ (E_m) \text{ a deux solutions réelles} \\ \text{pour } m \in]-8,4|,\ (E_m) \text{ a deux solutions complexes conjuguées} \\ \text{pour } m=-8 \text{ et } m=4,\ (E_m) \text{ a une unique solution.}\end{array}}$

Correction 13.

- Montrons que $g\circ f$ est injective.
  Soient x et x' dans E, on suppose que $g\circ f(x) = g\circ f(x')$.
  Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$.
  Or g est injective, donc $f(x)=f(x')$.
  Or f est injective, donc $x=x'$.
  Donc $\underline{g\circ f \text{ est injective}}$.
- Montrons que $g\circ f$ est surjective.
  Soit y dans G, montrons qu'il existe x dans E tel que $g\circ f(x)=y$.
  g est surjective donc il existe z dans F tel que $g(z)=y$.
  Et f est surjective donc il existe x dans E tel que $f(x)=z$.
  Alors $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.
  Donc x est bien un antécédent de y par $g\circ f$.
  Donc $\underline{g\circ f \text{ est surjective}}$.

Donc $\boxed{g\circ f \text{ est bijective}}$.

Soit y dans G, on note $x=(g\circ f)^{-1}(y)$, alors x est l'antécédent de y par $g\circ f$, autrement dit $g\circ f(x)=y$, soit $g(f(x))=y$.
Donc $g^{-1}(g(f(x))) = g^{-1}(y)$.
Or $g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$, donc $f(x)=g^{-1}(y)$, donc $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(y))$ soit $x = f^{-1}(g^{-1}((y)))$.
On a donc pour tout y de G, $(g\circ f)^{-1}(y) = f^{-1}\circ g^{-1}(y)$, donc $\boxed{(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}}$.

Correction 14.

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\backslash B)\cup(B\backslash A) \\
&= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) \text{ définition de } \backslash \\
&= \Big((A\cap\overline{B})\cup B\Big)\cap\Big((A\cap\overline{B})\cup\overline{A}\Big) \text{ on a distribué le } (A\cap\overline{B}) \\
&= \Big((A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\Big)\cap\Big((A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\Big) \text{ dans chaque grande parenthèse, on a distribué le terme de droite} \\
&= \Big((A\cup B)\cap E\Big)\cap\Big(E\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\Big) \\
&= \Big(A\cup B\Big)\cap\Big(\overline{A}\cup\overline{B}\Big) \\
&= (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} \text{ règle sur les complémentaires et intersection et réunion} \\
&= (A\cup B)\backslash(A\cap B) \text{ définition de } \backslash
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)}$.