Corrigé du DM n°6

Correction 1.

1. $f = u^4$ avec $u(x) = x^3 + x - 2$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
$(u^4)' = 4u' \times u^{4-1}$ et $u'(x) = 3x^2 + 1$ donc $\boxed{f'(x) = 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3}$.

2. f est une fraction rationnelle, $2x - 1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2}$ donc $\boxed{f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}}$
$f'(x) = \dfrac{4(2x-1) - (4x-5) \times 2}{(2x-1)^2} = \boxed{\dfrac{6}{(2x-1)^2}}$.

3. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$: u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $u(x) > 0 \iff x > 1$
donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[}$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}}$

4. f est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{f'(x) = 2x\cos(x^2-3)}$

5. $f = (u+v) \times w$ avec $u(x) = \frac{1}{2x+2}$ et $v(x) = e^{3x}$ et $w(x) = \sin(2x)$.
⋆ u est une fraction rationnelle avec $2x + 2 \neq 0 \iff x \neq -1$, donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
v est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)
donc $u + v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
⋆ w est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.
Et $\boxed{f'(x) = (-\frac{2}{(2x+2)^2} + 3e^{3x})\sin(2x) + (\frac{1}{2x+2} + e^{3x}) \times 2\cos(2x)}$.

6. (réponse) $\boxed{f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}}$ et $\boxed{f'(x) = e^{x-\frac{1}{x}}\dfrac{x^4-2x^3-1}{x^2(x^2-1)^2}}$.

Correction 2.

- $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 - 6x + \frac{9}{2}$.
u est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est définie pour tout x tel que $u(x) \geqslant 0$, et f est dérivable en tout x tel que $u(x) > 0$.
On étudie u :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{2} = 36 - 36 = 0$ donc il y a une racine : $x_0 = \dfrac{6}{2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$.
Et $a = 2 \geqslant 0$ donc pour tout réel x, $u(x) \geqslant 0$, et $u(x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$.
Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}}$.
- $g(x) = \ln(v(x))$ avec $v(x) = x^2 - 4x + 5$.
v est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Donc g est définie et dérivable pour tous les x tels que $v(x) > 0$.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$ donc v n'a pas de racines réelles, et $a = 1 > 0$ donc v est toujours strictement positif.
Donc $\boxed{g \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$.

Correction 3.

1. $4(10x+1)(-3x-4)(3-x) = 0 \iff 4 = 0$ ou $10x + 1 = 0$ ou $-3x - 4 = 0$ ou $3 - x = 0$
$\iff x = \frac{-1}{10}$ ou $x = \frac{-4}{3}$ ou $x = 3$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-\frac{1}{10}; -\frac{4}{3}; 3\}}$

2.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$4x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{(2x-1)(2-x)}{4x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

car $2x - 1 > 0 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}$
car $2 - x > 0 \iff 2 > x$
car $4x + 3 > 0 \iff 4x > -3 \iff x > -\frac{3}{4}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]\frac{1}{2}, 2[}$.

3. $$\begin{aligned}(2x+1)(3x+4) \leqslant (2x+1)(x+5) &\iff (2x+1)(3x+4)-(2x+1)(x+5) \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)\big(3x+4-(x+5)\big) \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)\big(3x+4-x-5\big) \leqslant 0\\ &\iff (2x+1)(2x-1) \leqslant 0\end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		car $2x+1>0 \iff 2x>-1 \iff x>-\frac{1}{2}$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		car $2x-1>0 \iff 2x>1 \iff x>\frac{1}{2}$
$(2x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

Donc $\boxed{\mathcal{S}=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

4. $$\begin{aligned}\frac{3}{2x+5} > \frac{2}{5x+2} &\iff \frac{3}{2x+5}-\frac{2}{5x+2} > 0\\ &\iff \frac{3(5x+2)}{(2x+5)(5x+2)}-\frac{2(2x+5)}{(5x+2)(2x+5)} > 0\\ &\iff \frac{15x+6-(4x+10)}{(5x+2)(2x+5)} > 0\\ &\iff \frac{11x-4}{(5x+2)(2x+5)} > 0\end{aligned}$$

Les trois facteurs sont des fonctions affines croissantes donc sur les 3 lignes, nous aurons « $-0+$ ».

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{4}{11}$		$+\infty$	
$11x-4$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		$11x-4=0 \iff x=\frac{4}{11}$
$5x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$		$5x+2=0 \iff x=-\frac{2}{5}$
$2x+5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		$2x+5=0 \iff x=-\frac{5}{2}$
$\frac{11x-4}{(5x+2)(2x+5)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$		

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-\frac{5}{2},-\frac{2}{5}[\cup]\frac{4}{11},+\infty[}$.

5. On remarque que ce polynôme s'annule en 1.
Par division euclidienne ou identification des coefficients, on obtient $-2x^3+3x^2+2x-3=(x-1)(-2x^2+x+3)$.
Et les racines de $-2x^2+x+3$ sont $\frac{3}{2}$ et -1, donc $-2x^2+x+3=-2(x-1)(x+1)(x-\frac{3}{2})$.
Ainsi,

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$	
-2		$-$		$-$		$-$		$-$		
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		car $x-1>0 \iff x>1$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		car $x+1>0 \iff x>-1$
$x-\frac{3}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		car $x-\frac{3}{2}>0 \iff x>\frac{3}{2}$
$-2x^3+3x^2+2x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-1,1[\cup]\frac{3}{2},+\infty[}$.

Attention : « $(2x+1)(2x-1) \geqslant 0$ » N'est PAS équivalent à « $2x+1 \geqslant 0$ ou $2x-1 \geqslant 0$ ».

Correction 4. (indications)

1. $$\begin{aligned}\cos(x)=\sin(2x) &\iff \cos(x)=2\sin(x)\cos(x)\\ &\iff \cos(x)(1-2\sin(x))=0\\ &\iff \cos(x)=0 \text{ ou } 1-2\sin(x)=0\\ &\iff \dots\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_1=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

2. On trouve $\boxed{\mathcal{S}_2=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

3. On procède par double inclusion.