Devoir Maison n°4
pour

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

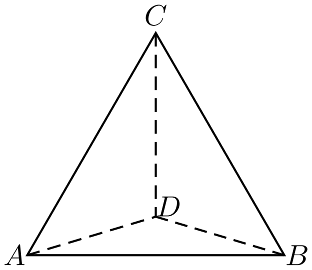
Exercice 1.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, on considère les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer :

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
(b) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$
(c) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$
(d) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v})$ puis $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
(e) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$
(f) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$

Exercice 2.

Une molécule de méthane (CH_4) est constituée par quatre atomes d'hydrogène qui sont les sommets A, B, C et D d'un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que $AB = AC = AD = BC = CD = DB$, on prendra comme unité de longueur cette arête commune) et d'un atome de carbone situé au point G, isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ et en déduire que (AB) et (CD) sont orthogonales.
On admet pour la suite que deux arêtes non sécantes de $ABCD$ sont orthogonales.

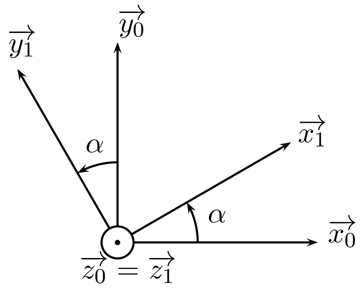
2. **(a)** Traduire la définition de G en une relation vectorielle, en déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

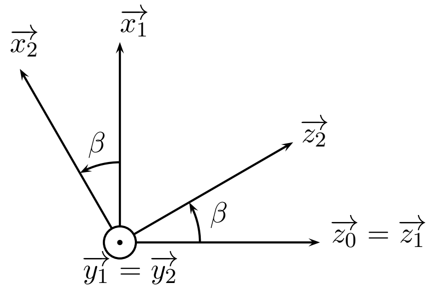
(b) Utiliser la relation précédente pour calculer $\overrightarrow{AG}^2$.
En déduire que $AG = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

(c) Que peut-on penser de BG, CG et DG ?

★ **3.** Démontrer que $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{8}$.
En utilisant l'approximation $\cos(109°) \approx -\frac{1}{3}$, justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}}\right) \approx 109°$.

Exercice 3. (à partir de Vendredi)





Dans cet l'exercice, nous allons calculer $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2}$ de deux manières.

1. Exprimer $\overrightarrow{x_0}$ dans la base 1 et en déduire une expression de $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{x_2}$ dans la base 1 et en déduire une (autre) expression de $\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x_2}$.

3. Comparer les résultats (*Spoiler alert : ce sont les mêmes ... à démontrer !*).