Corrigé du DM n°3

Correction 1.

- $f(t)$: $A = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
  On cherche φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on peut prendre $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.
  Ainsi, $\boxed{f(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}$.
- $g(t)$: $A = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
  On cherche φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.
  On peut prendre $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, on obtient alors $\boxed{g(t) = 2\sqrt{3}\cos\left(t - \frac{5\pi}{6}\right)}$.

Correction 2.

(a) $$\begin{aligned}\cos(3x + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos(3x + \tfrac{\pi}{6}) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad 3x + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x + \tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi\end{aligned}$$

Or $$\begin{aligned}3x + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi &\iff 3x = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\iff 3x = \tfrac{3\pi}{12} - \tfrac{2\pi}{12} + 2k\pi \\ &\iff x = \tfrac{\pi}{36} + 2k\tfrac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Et $$\begin{aligned}3x + \tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi &\iff 3x = -\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\iff 3x = -\tfrac{3\pi}{12} - \tfrac{2\pi}{12} + 2k\pi \\ &\iff x = -\tfrac{5\pi}{36} + 2k\tfrac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont tous les nombres s'écrivant } \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \text{ entier relatif.}}$

(b) $$\begin{aligned}\sin(x) - \sin(3x) = 0 &\iff \sin(x) = \sin(3x) \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad x = 3x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 3x + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad -2x = -2k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que} \quad x = -k\pi \text{ ou } x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont tous les nombres s'écrivant } -k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \text{ entier relatif.}}$

(c) $$\begin{aligned}\tan(x + \tfrac{\pi}{5}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} &\iff \tan(x + \tfrac{\pi}{5}) = \tan(\tfrac{\pi}{6}) \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x + \tfrac{\pi}{5} = \tfrac{\pi}{6} + k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\tfrac{\pi}{30} + k\pi \quad (\text{car } \tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\pi}{5} = \tfrac{5\pi}{30} - \tfrac{6\pi}{30} = -\tfrac{\pi}{30})\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont tous les angles s'écrivant } -\frac{\pi}{30} + k\pi \text{ avec } k \text{ un entier relatif.}}$

Correction 3.

1. f est une fraction rationnelle, elle définie pour tous les x tels que $x - 3 \neq 0$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}}$.

2. $f(\frac{3}{2}) = \dfrac{2 \times \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 3} = \dfrac{3}{\frac{3}{2} - \frac{6}{2}} = \dfrac{3}{-\frac{3}{2}} = 3 \times \dfrac{-2}{3} = -2$. $\boxed{\text{L'image de } \frac{3}{2} \text{ par } f \text{ est } -2.}$

3. Pour $x \neq 3$: $$\begin{aligned}f(x) = -4 &\iff \tfrac{2x}{x-3} = -4 \\ &\iff 2x = -4(x-3) \\ &\iff 2x + 4x = 12 \\ &\iff x = 2\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le seul antécédent de } -4 \text{ par } f \text{ est } 2.}$

Correction 4.

- $f = u \circ v$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = -3x + 12$.

  $\star$ $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}$

  $\star$ $v(x) \in \mathcal{D}_u \iff -3x + 12 > 0 \iff 12 > 3x \iff x < 4$

  Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, 4[}$.

- $g = \dfrac{g_1 \circ g_2}{g_3}$ avec $g_1(x) = \sqrt{x}$, $g_2(x) = -2x + 7$ et $g_3(x) = x - 3$.

  $\star$ $\mathcal{D}_{g_2} = \mathbb{R}$ et $g_2(x) \in \mathcal{D}_{g_1} \iff -2x + 7 \geqslant 0 \iff 7 \geqslant 2x \iff x \leqslant \frac{7}{2}$
  donc $\mathcal{D}_{g_1 \circ g_2} =]-\infty, \frac{7}{2}]$.

  $\star$ $D_{g_3} = \mathbb{R}$

  $\star$ $g_3(x) \neq 0 \iff x \neq 3$

  Donc $\boxed{\mathcal{D}_g =]-\infty, 3[\cup]3, \frac{7}{2}]}$.

- $h = h_1 \times h_2$ avec $h_1(x) = \frac{1}{x^2}$ et $h_2(x) = e^x$.

  $\star$ $\mathcal{D}_{h_1} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

  $\star$ $\mathcal{D}_{h_2} = \mathbb{R}$

  Donc $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \backslash \{0\}}$.