Corrigé du DM n°32

Correction 2. indications et réponses.

1. DL$_7$ de $\frac{1}{1-u}$ avec $u = x^2 + x^3$ possible car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + x^3 = 0$:
$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + o(u^7)$

u	$x^2 + x^3$	$\times 1$
u^2	$x^4 + 2x^5 + x^6$	$\times 1$
u^3	$x^6 + 3x^7$	$\times 1$
u^4		$\times 1$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} x + 1 = 0$ donc $\sin(x+1) \underset{x\to -1}{=} (x+1) - \frac{(x+1)^3}{6} + o((x+1)^3)$
$\frac{1}{x} = -\frac{1}{1-(x+1)} \underset{x\to -1}{=} -\left(1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3\right) + o((x+1)^3)$
$\underset{x\to -1}{=} -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 + o((x+1)^3)$.

Donc $\boxed{\sin(x+1) + \frac{1}{x} \underset{x\to -1}{=} -1 - (x+1)^2 - \frac{7}{6}(x+1)^3 + ((x+1)^3)}$.

3. $\ln(e+x) = \ln(e(1+\frac{e}{x})) = \ln(e) + \ln(1+\frac{x}{e}) = 1 + \ln(1+\frac{x}{e})$
Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e} = 0$.
Donc $\boxed{\ln(e+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{e}x - \frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{1}{3e^3}x^3 - \frac{1}{4e^4}x^4 + o(x^4)}$

4. produit des DL$_3$ de $\sin(x)$ et $\frac{1}{1-x}$: $\boxed{\frac{\sin(x)}{1-x} \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)}$

5. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} = (1 + (x-2))^{-\frac{3}{2}}$
$(1+u)^{-\frac{3}{2}} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{3}{2}u + \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{2}u^2 + o(u^2)$
$\underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{3}{2}u + \frac{15}{8}u^2 + o(u^2)$
$\lim\limits_{x\to 2} x - 2 = 0$ donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} \underset{x\to 2}{=} 1 - \frac{3}{2}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 + o((x-2)^2)}$

6.
- $\star$ DL$_6$ de $\cos(x)$, puis de $\cos(x) - 1$ puis mis au carré en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 6 : $(\cos(x)-1)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)$
- $\star$ DL$_6$ de $\sin(u)$ puis u est remplacé par x^2 (qui tend bien vers 0) pour avoir le DL$_6$ de $\sin(x^2)$: $\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$
- $\star$ produit : $\boxed{(\cos(x)-1)^2 \sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^6}{4} + o(x^6)}$

Correction 3.

1. $f((1,0,0)) = (-1,1)$, $f((0,1,0)) = (3,1)$ et $f((0,0,1)) = (2,1)$.
Donc $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans les bases canoniques et } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. $g(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ et $g(X) = (X+1) + (X-1) - 2X = 0$
$g(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = X^2 + 2X + 1 + X^2 - 2X + 1 - 2X^2 = 2$

$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base canonique est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$