Devoir Maison n°31

pour Mardi 3 juin, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. **(a)** Déterminer deux réels α et β tels que :
$\forall x \in [0,1], \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

3. **(a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+x+1 = \dfrac{3\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}{4}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
(on pourra faire le changement de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$).

4. Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{e} t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} y^2 \cos(y)\,\mathrm{d}y$

★ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2.

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], 0 \leqslant t^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.

2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. Conclure sur la convergence de la suite (I_n).

4. Grâce à une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$.

Facultatif : révisions, approfondissement...

Exercice 3.

On pose $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$.
A-t-on $A+B=\mathbb{R}^3$? et $A \oplus B = \mathbb{R}^3$?

Exercice 4.

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à la décomposition en somme directe.

2. Déterminer les coordonnées de $X^3 - 4X^2 - 5X + 3$ dans cette base.

Exercice 5.

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ et donner une base de F.

Exercice 6.

On travaille dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M de E, on appelle trace de M et on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M. Par exemple, $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 3 + \sqrt{2}$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

2. Soit $G = \mathrm{Vect}\,(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base adaptée à la décomposition en somme directe.

3. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7.

On cherche à déceler la présence d'un virus dans une population. On procède pour cela à des analyses de sang : l'analyse est dite positive lorsque le virus est détecté dans l'échantillon analysé.
Pour réduire le nombre d'analyses, on propose de regrouper la population en g groupes de n individus chacun, de regrouper le sang des n individus dans une éprouvette, et de tester cette éprouvette : si le test est positif, on fait alors une analyse de sang pour chaque personne de ce groupe.
On estime que le virus est présent chez 1% des personnes et on note N le nombre total de personnes ($N = ng$).
On suppose que la présence du virus chez une personne est indépendante des autres personnes.

1. **(a)** Déterminer la probabilité que le virus soit présent dans un regroupement de n individus.

(b) On note X le nombre de groupes pour lesquels l'analyse est positive.
Déterminer la loi suivie par X.

2. Exprimer en fonction de X, le nombre Y d'analyses nécessaires avec cette méthode de groupement, et déterminer $E(Y)$.

3. Cette méthode est-elle intéressante pour une population de $N = 1000$ personnes et des groupes de $n = 100$ personnes ?

Indications DM n°31

Exercice 1.

1. $\dfrac{1+x}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x}{1+x^2}$

2. **(a)** Mettre au même dénominateur $\dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3}$, et identifier les coefficients du numérateur.

4. **(a)** on intégre t^n et on dérive ln

(b) on intègre cos et on dérive y^2, et il faut refaire une intégration par parties en dérivant y et intégrant sin.

Exercice 2.

4. la relation entre I_{n+1} et I_n est $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

Exercice 3.

On peut chercher une base de A et une base de B et utiliser les dimensions.

Exercice 4.

proche du DM 30 (corrigé sur le site)

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

1. **(a)** utiliser le contraire

(b) loi binomiale où le p est le résultat du **(a)**