Corrigé du DM n°2

Correction 1.

1. T est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$.
Donc $x_T = \frac{1}{3}(3+0-2) = \frac{1}{3}$ et $y_T = \frac{1}{3}(1-3+2) = 0$.
$\boxed{\text{Le centre de gravité a pour coordonnées } (\frac{1}{3}, 0).}$

2. $x_I = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$ et $y_I = \frac{1-3}{2} = -1$, on a donc $\boxed{I(\frac{3}{2}, -1)}$.

$IC = \sqrt{(-2-\frac{3}{2})^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+9} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$.

Et $TC = \sqrt{(-2-\frac{1}{3})^2 + (0-2)^2} = \sqrt{\frac{85}{9}} = \frac{\sqrt{85}}{3}$

On a donc $\frac{2}{3}IC = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{85}}{2} = \frac{\sqrt{85}}{3} = TC$.
Donc $\boxed{TC = \frac{2}{3}IC}$

3. $x_G = \frac{1}{2-1-3}(2\times 3 - 1\times 0 - 3\times(-2)) = -\frac{1}{2}\times 12 = -6$
$y_G = -\frac{1}{2}(2\times 1 - 1\times(-3) - 3\times 2) = \frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{G \text{ a pour coordonnées } (-6, \frac{1}{2})}$.

4. D'après le théorème de réduction appliqué en B :
$(2-1-3)\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} - 1\overrightarrow{BB} - 3\overrightarrow{BC}$ soit $-2\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}}$.

5. On note (x,y) les coordonnées de E, alors :

D barycentre de $(A,1),(C,-2)$ et $(E,4)$ si et seulement si $\begin{cases} 1 = \frac{1}{1-2+4}(1\times 3 - 2\times(-2) + 4\times x) & (1) \\ 3 = \frac{1}{1-2+4}(1\times 1 - 2\times 2 + 4\times y) & (2) \end{cases}$

D'après (1) $3 = 3+4+4x$ soit $x = -1$
et d'après (2) $9 = 1-4+4y$ donc $y = 3$.
Donc $\boxed{E \text{ a pour coordonnées } (-1,3)}$.

Correction 2.

parenthèses indispensables !!!

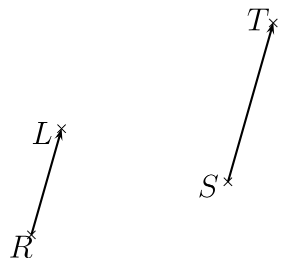
1.
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-(1-2\sin^2(x))}{2\sin(x)\cos(x)} + \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+2\cos^2(x)-1} \\ &= \frac{2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} + \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \boxed{2\tan(x)} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)\sin(3x) - \sin(x)\cos(3x)}{\sin(x)\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(3x-x)}{\sin(x)\cos(x)} \qquad (\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \text{ avec } a = 3x \text{ et } b = x) \\ &= \frac{\sin(2x)}{\sin(x)\cos(x)} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)} \\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2\times 2x) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \\ &= 2\Big(2\cos^2(x) - 1\Big)^2 - 1 \\ &= 2\Big(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1\Big) - 1 \\ &= \boxed{8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1}\end{aligned}$$

Correction 3.

1. D'après la définition du barycentre, $3\overrightarrow{LR} - 2\overrightarrow{LS} + 2\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{0}$
Or $-2\overrightarrow{LS} + 2\overrightarrow{LT} = 2(\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{LT}) = 2\overrightarrow{ST}$.
Donc $3\overrightarrow{LR} + 2\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{LR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, donc les droites (LR) et (ST) sont parallèles.
Donc $\boxed{L \text{ est sur la parallèle à } (ST) \text{ passant par } R}$.



2. On a aussi $-\overrightarrow{LR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ST}$, soit $\overrightarrow{RL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ST}$.