Devoir Maison n°29

pour mardi 20 mai, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

1. **(a)** Donner l'ensemble de définition et les intervalles de continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$.

(b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ et définir ce prolongement que l'on notera g.

(c) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

(d) Si oui, g est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

2. Mêmes questions avec la fonction $h : x \mapsto x^x$ à prolonger sur $\mathbb{R}^+$.

★ **3.** Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Dans l'exercice 9, on a montré que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que f n'est pas dérivable 2 fois en 0.

Exercice 2.

Calculer les dérivées de 4 fonctions parmi les suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad h(x) = (1+x)^{1-x}$ $\quad l(x) = xe^{\sin(x)}$

$g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ $\quad k(x) = \left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^3$ $\quad m(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+1}}$

Exercice 3.

1. a et b sont des réels avec $0 < a < b$.
Appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version) à la fonction ln entre a et b. (*on justifiera avec précision que ce théorème s'applique*)

2. En déduire que $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2$ avec $a < b$, $\quad a \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant b$.

TSI 2.1 *lycée Monge* 2024-2025 DM n°29

Devoir Maison n°29

pour mardi 20 mai, 10h

Version « moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

1. **(a)** Donner l'ensemble de définition et les intervalles de continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$.

(b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ et définir ce prolongement que l'on notera g.

(c) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice 2.

Calculer les dérivées de 4 fonctions parmi les suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad h(x) = (1+x)^{1-x}$ $\quad l(x) = xe^{\sin(x)}$

$g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ $\quad k(x) = \left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^3$ $\quad m(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+1}}$

Exercice 3.

1. a et b sont des réels avec $0 < a < b$.
Appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version) à la fonction ln entre a et b. (*on justifiera avec précision que ce théorème s'applique*)

2. En déduire que $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2$ avec $a < b$, $\quad a \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant b$.