

DEVOIR MAISON N°28

pour mardi 13 mai, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, proposer plusieurs méthodes qui permettent de les justifier.

(≈1 ligne par méthode, on ne demande pas la justification détaillée !)

1. La famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, où $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = (X - 1)^2$ et $P_4 = (X - 1)^3$, est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. (au moins 4 méthodes)
2. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
La famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ n'est pas libre. (au moins 3 méthodes)
Elle n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. (au moins 2 méthodes)
3. $v_1 = (1, 0; 3)$, $v_2 = (-1, 1, 4)$ et $v_3 = (-1, 7, -1)$.
 (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 . (au moins 3 méthodes)

Exercice 2.

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On y effectue une succession de tirages d'une boule, sans remise, jusqu'à obtenir la deuxième boule blanche. On note alors X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance et sa variance.
2. On instaure le jeu d'argent suivant : on gagne 10€ si on accepte de jouer, mais on perd 6€ par boule noire piochée. On note G le gain algébrique du joueur.
 - (a) Exprimer G en fonction de X .
 - (b) En moyenne, le jeu est-il équilibré ?
 - (c) Calculer la variance de G .

★ Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et 2 boules noires.

On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire. On appelle alors X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Déterminer la loi de probabilité de X et vérifier qu'on a bien $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$.

DEVOIR MAISON N°28

pour mardi 13 mai, 10h

VERSION « MOINS MAIS BIEN ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, proposer plusieurs méthodes qui permettent de les justifier.

(≈1 ligne par méthode, on ne demande pas la justification détaillée !)

1. La famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, où $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = (X - 1)^2$ et $P_4 = (X - 1)^3$, est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. (au moins 4 méthodes)

Exercice 2.

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On y effectue une succession de tirages d'une boule, sans remise, jusqu'à obtenir la deuxième boule blanche. On note alors X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance et sa variance.
2. On instaure le jeu d'argent suivant : on gagne 10€ si on accepte de jouer, mais on perd 6€ par boule noire piochée. On note G le gain algébrique du joueur.
 - (a) Exprimer G en fonction de X .
 - (b) En moyenne, le jeu est-il équilibré ?
 - (c) Calculer la variance de G .