Corrigé du DM n°27

Correction 1.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{12} = \boxed{+\infty}$.

f est un polynôme donc dérivable et $f'(x) = \frac{3x^2}{12} - 1 = \frac{1}{4}(x^2-4) = \frac{1}{4}(x-2)(x+2)$.

Donc

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

- pour $x \geqslant 0$, $x+2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.
- $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$
- $f(2) = \frac{8}{12} - 2 + 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.

2. (a)
- sur $[0,2]$:
  - $\star$ f est continue (polynôme)
  - $\star$ f est strictement décroissante sur $[0,2]$
  - $\star$ $f(0) = 1$ et $f(1) = -\frac{1}{3}$

  Donc par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0,2]$ sur $[-\frac{1}{3}, 1]$.
  Or $0 \in [-\frac{1}{3}, 1]$, donc 0 admet un unique antécédent par f sur $[0,2]$, qui sera noté α.

- sur $]2,+\infty[$: même chose avec $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et f strictement croissante et $0 \in]-\frac{1}{3}, +\infty[$.
  Donc f s'annule exactement une fois sur $]2,+\infty[$, en β.

Donc $\boxed{f \text{ s'annule bien 2 fois sur } [0,+\infty[}$.

$f(1) = \frac{1}{12} - 1 + 1 = \frac{1}{12} > 0$ donc $f(1) > f(\alpha)$ et f décroissante sur $[0,2]$, intervalle qui contient α et 1, donc $\boxed{\alpha \geqslant 1}$.

(b) D'après les variations de f et la question précédente :
$\boxed{f(x) > 0 \text{ pour } x \in [0,\alpha[\cup]\beta,+\infty[}$ et $\boxed{f(x) < 0 \text{ pour } x \in]\alpha,\beta[}$.

(c) $f(\alpha) = 0$ donc $\frac{\alpha^3}{12} - \alpha + 1 = 0$ donc $\boxed{1 + \frac{\alpha^3}{3} = \alpha}$.

3. (a) $u_1 = 1 + \frac{1^3}{12} = \boxed{\frac{13}{12}}$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n \in [0,\alpha]$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $\alpha \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \in [0,\alpha]$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On sait que $u_{k+1} = g(u_k)$, et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0 + \frac{3x^2}{12} = \frac{x^2}{4} \geqslant 0$ donc g est croissante.
De plus, par hypothèse, $0 \leqslant u_k \leqslant \alpha$ donc $g(0) \leqslant g(u_k) \leqslant g(\alpha)$.
C'est-à-dire $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 + \frac{\alpha^3}{12}$ et $1 + \frac{\alpha^3}{12} = \alpha$ (d'après **2.(c)**).
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,\alpha]}$.

(b) $\forall n$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n^3}{12} - u_n = \boxed{f(u_n)}$.
Or $u_n \in [0,\alpha]$ donc par **1.(b)**, $f(u_n) \geqslant 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

Ainsi, (u_n) est majorée (par α) et croissante, donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

(c) Alors (u_{n+1}) est une suite extraite de (u_n) donc elle converge aussi vers ℓ.
Or g étant continue, $g(u_n)$ tend vers $g(\alpha)$.
Pour tout n, $u_{n+1} = g(u_n)$ donc par unicité de la limite, $\ell = g(\ell)$ soit $\boxed{\ell = 1 + \frac{\ell^3}{12}}$.
Donc $\frac{\ell^3}{12} - \ell + 1 = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$.
Et par passage à la limite, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \alpha]$, on a $\ell \in [0, \alpha]$.
Or d'après **2(a)** la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ qui soit dans $[0, \alpha]$ est α.
Donc $\ell = \alpha$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

(d)

```
u=1
n=0
while u**3/12-u+1>10**(-7):
    u=1+u**3/12
    n+=1
print('n_0' vaut,n,'et u_n0 vaut', u)
```

Ce $\boxed{u_{n_0} \text{ est une valeur approchée de } \alpha}$.

Correction 2.

1. $f = \frac{g}{h \circ i}$ avec $g(x) = x$, $h(x) = \sqrt{x}$ et $i(x) = 2(1 - \cos(x))$

⋆ g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur I ;

⋆ i est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur I, h est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
On va vérifier que $\forall x \in I$, $i(x) \in [0, +\infty[$:
$\forall x \in I, \cos(x) < 1$ donc $-\cos(x) > -1$ donc $2(1 - \cos(x)) > 0$.
Donc $h \circ i$ est définie et continue sur I.

⋆ $\forall x \in I, i(x) \neq 0$ donc $h(i(x)) \neq 0$

Donc par quotient, $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I}$.

autre version :

f est une fraction :

⋆ le numérateur est défini et continu sur I

⋆ le dénominateur est la composée de $x \mapsto 2(1 - \cos(x))$, définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur I, par la racine carrée, définie et continue sur $[0, +\infty[$.
Or $\forall x \in]0, 2\pi[$, $\cos(x) < 1$ donc $2(1 - \cos(x)) > 0$, donc la composée est définie et continue, et ne s'annule pas sur I.

Donc $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I}$.

2. (a) $\lim\limits_{x \to 2\pi} x = 2\pi$
et $\lim\limits_{x \to 2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(x))} = \sqrt{0} = 0$
de plus, $\sqrt{2(1 - \cos(x))} > 0$, donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to 2\pi} f(x) = +\infty}$.

(b) $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $\sqrt{2(1 - \cos(x))} \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} x$ car $x > 0$ sur I.
Donc $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1}$.
La limite en 0 est finie donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continué en } 0}$.
Et le prolongement est
$$\boxed{\begin{array}{rccl} h : & [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2(1-\cos(x))}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$$

(c) $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ a une asymptote verticale d'équation } x = 2\pi.}$

3. **(a)** Pour $x \in]0,1[$, $g(x) = \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2(1-\cos(\arccos(1-x)))}} = \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2(1-(1-x))}} = \boxed{\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x}}}$.

(b) Or $\lim\limits_{x\to 0} \arccos(1-x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} f(X) = 1$ donc par composition de limite, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.
Autrement dit, d'après **(a)**, $\boxed{\arccos(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2x}}$.

Correction 3.

1. On note E cet ensemble, et on va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
⋆ On note f_0 la fonction nulle, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(-x) = 0 = -f_0(0)$.
Donc $f_0 \in E$.
⋆ Soient f et g dans E, et λ un réel. Montrons que $f + \lambda g$ est dans E.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (f+\lambda g)(-x) &= f(-x) + \lambda g(-x) \\ &= -f(x) - \lambda g(x) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont impaires} \\ &= -(f+\lambda g)(x)\end{aligned}$$

Donc $f + \lambda g$ est impaire donc $f + \lambda g$ est dans E.
Donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

2. Soient α, β et γ des réels, on suppose que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = f_0$ où f_0 est la fonction nulle.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0$.
En particulier pour $x = 0$: $\alpha \times 0^2 + \beta e^0 + \gamma \lfloor 0 \rfloor = 0$ soit $\beta \times 1 = 0$ donc $\beta = 0$.
Alors, pour $x = \frac{1}{2}$, $\alpha \times \frac{1}{4} + \gamma \times 0 = 0$ donc $\alpha = 0$. Et donc pour $x = 1$, $\gamma \times 1 = 0$ donc $\gamma = 0$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$.

Montrons que la fonction $g : x \mapsto x$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
On suppose que $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)$.
En particulier pour $x = 0$: $0 = \lambda_1 \times 0^2 + \lambda_2 e^0 + \lambda_3 \lfloor 0 \rfloor$ donc $\lambda_2 = 0$.
Alors, pour $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} = \lambda_1 \times \frac{1}{4} + \lambda_3 \times \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$ soit $\frac{1}{2} = \lambda 1 \times \frac{1}{4} + 0$ donc $\lambda_1 = 2$.
Alors pour $x = 1$: $1 = 2 \times 1^2 + \lambda_3 \times 1$ donc $\lambda_3 = -1$.
Finalement pour $x = 2$: on obtiendrait $2 = 2 \times 2^2 - \lfloor 2 \rfloor$ ce qui donnerait $2 = 6$ ce qui est absurde.
Donc on ne peut pas trouver de réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$.
Donc g n'est pas engendrée par $\mathcal{F}$ donc $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ n'est pas génératrice de } E}$.

3. Les degrés respectifs de P_1, P_2, P_3 et P_4 sont 0, 1, 2 et 3, ils sont donc échelonnés, donc la famille est libre.
De plus, la famille a 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

On note $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ les coordonnées de P dans cette base.
Alors $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$.
En particulier $P(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) + \lambda_3 P_3(1) + \lambda_4 P_4(1)$ donc $10 = \lambda_1$.
Et $P' = 10P_1' + \lambda_2 P_2' + \lambda_3 P_3' + \lambda_4 P_4'$.
Donc $3X^2 + 4X + 3 = 0 + \lambda_2 + 2\lambda_3(X-1) + 3\lambda_4(X-1)^2$
Donc en prenant la valeur en 1 : $10 = \lambda_2 \times 1 + \lambda_3 \times 0 + \lambda_4 \times 0$ soit $\lambda_2 = 10$.
On continue à dériver : $6X + 4 = 2\lambda_3 + 6\lambda_4(X-1)$, la valeur en 1 donne $10 = 2\lambda_3$ soit $\lambda_3 = 5$.
En dérivant une dernière fois, $6 = 6\lambda_4$ donc $\lambda_4 = 1$.
$\boxed{\text{Les coordonnées de } P \text{ dans la base } \mathcal{F} \text{ sont } (10, 10, 5, 1).}$

Correction 4.

• pour f : si $x<0$, $|x|=-x$ donc pour $x<0$, $f(x)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\neq f(0)$.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 0}$.

• pour g :

⋆ $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)=0$ par le théorème des croissances comparées ;

⋆ $g(0)=0$;

⋆ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

Donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$.

Correction 5.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=0$ et $e^y-1\underset{y\to 0}{\sim} y$ donc $e^{\sin(x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim} x$.

Donc $\dfrac{2x}{e^{\sin(x)}-1}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{2x}{x}\underset{x\to 1}{\sim} 2$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^{\sin(x)}-1}=2}$.

2. $\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{x}=\dfrac{e^{7x}-1}{x}-\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} 7x=0$ donc $e^{7x}-1\underset{x\to 0}{\sim} 7x$ donc $\dfrac{e^{7x}-1}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{7x}{x}\underset{x\to 0}{\sim} 7$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{x}=7$.

De même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$.

Donc par soustraction de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{x}=5}$.

3. ⋆ $\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$ donc $1-e^{2x}\underset{x\to 0}{\sim} -2x$

⋆ $\lim\limits_{x\to 0} 3x=0$ et $1-\cos(y)\underset{y\to 0}{\sim}\frac{y^2}{2}$ donc $1-\cos(3x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{(3x)^2}{2}$

⋆ $x^2+3x^4\underset{x\to 0}{\sim} x^2$

Donc par produit et quotient, $\dfrac{(1-e^{2x})(1-\cos(3x))}{x^2+3x^4}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{-2x\times(3x)^2}{2\times x^2}\underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{9x^3}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim} -9x$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^{2x})(1-\cos(3x))}{x^2+3x^4}=0}$

Correction 6.

1. Soit x dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $f(x)=f(\frac{x}{2^n})$.

Initialisation : $2^0=1$ donc $f(\frac{x}{2^0})=f(\frac{x}{1})=f(x)$.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $f(x)=f(\frac{x}{2^k})$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après l'énoncé, $f(2\times\frac{x}{2^{k+1}})=f(\frac{x}{2^{k+1}})$.
Or $f(2\times\frac{x}{2^{k+1}})=f(\frac{x}{2^k})=f(x)$ par hypothèse de récurrence, donc $f(\frac{x}{2^{k+1}})=f(x)$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n\in\mathbb{N}, f(x)=f(\frac{x}{2^n})$.

Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, f(x)=f(\frac{x}{2^n})}$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$ (car $2>1$) et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=f(0)$.
Or $\forall n\in\mathbb{N}, f(\frac{x}{2^n})=f(x)$ donc par unicité de la limite, $f(x)=f(0)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Correction 7. (indications)

1. **(a)** $P(2) = 0$.
   $P' = -5X^4 + 20X^3 - 21X^2 + 4X - 4$ et $P'(2) = 0$
   De même, $P''(2) = 0$ mais $P^{(3)}(2) \neq 0$.
   Donc $\boxed{\text{2 est racine de multiplicité 3 de } P}$.

   (b) $(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ et on trouve $P = (X^3 - 6X^2 + 12X - 8)(-X^2 - X - 1)$
   Le discriminant de $-X^2 - X - 1$ est -3 donc ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ donc la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est $\boxed{P = -(X-2)^3(X^2 + X + 1)}$.
   Dans $\mathbb{C}[X]$, $-X^2 - X - 1 = -(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$.
   Donc dans $\mathbb{C}[X]$, $\boxed{P = -(X-2)^3(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})}$.

2. La dérivée de $1 - X^n$ est $-nX^{n-1}$ qui a pour seule racine 0. Et 0 n'est pas racine de $1 - X^n$.
   Donc il n'y a pas de racine commune entre le polynôme et sa dérivée.
   Donc $\boxed{\text{les racines sont toutes de multiplicité 1}}$.
   OU : les racines de $1 - X^n$ sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec k dans $[\![0, n-1]\!]$, elles sont n et toutes différentes, et le degré du polynôme est n, donc elles sont toutes simples car le degré d'un polynôme non nul est supérieur ou égal au total des multiplicités des racines.

Correction 8. (indications)

On peut faire un arbre pondéré pour s'aider !

1. D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(L_2) &= \mathbf{P}(L_1)\mathbf{P}_{L_1}(L_2) + \mathbf{P}(\overline{L_1})\mathbf{P}_{\overline{L_1}}(L_2) \\ &= \tfrac{4}{20} \times \tfrac{3}{19} + \tfrac{16}{20} \times \tfrac{4}{19} \\ &= \tfrac{1}{5} \times \tfrac{3}{19} + \tfrac{4}{5} \times \tfrac{4}{19} \\ &= \tfrac{3+16}{5\times 19} \\ &= \tfrac{1}{5}\end{aligned}$$
(avec $\overline{L_k}$: « le k-ième chocolat mangé est noir »)

   $\underline{\text{La probabilité que le deuxième œuf mangé soit au lait est } \tfrac{1}{5}}$.

2. D'après la formule de Bayes : $\mathbf{P}_{\overline{L_2}}(L_1) = \dfrac{\mathbf{P}(L_1)\mathbf{P}_{L_1}(\overline{L_2})}{\mathbf{P}(\overline{L_2})}$
   Or $\mathbf{P}(\overline{L_2}) = 1 - \mathbf{P}(L_2) = \frac{4}{5}$.
   Donc $\mathbf{P}_{\overline{L_2}}(L_1) = \dfrac{\frac{1}{5} \times \frac{16}{19}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{16}{19} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{4}{19}$.
   $\boxed{\text{La probabilité que le premier œuf mangé ait été au lait lorsque le deuxième est noir est } \tfrac{4}{19}.}$

3. Soit L l'événement « il mange 3 œufs au lait ».
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(L) &= \mathbf{P}(L_1 \cap L_2 \cap L_3) \\ &= \mathbf{P}(L_1)\mathbf{P}_{L_1}(L_2)\mathbf{P}_{L_1\cap L_2}(L_3) \\ &= \tfrac{4}{20} \times \tfrac{3}{19} \times \tfrac{2}{18} \\ &= \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{19} \times \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{1}{285}\end{aligned}$$
   $\underline{\text{La probabilité que le gourmand mange trois œufs en chocolat au lait est } \tfrac{1}{285}}$.

   On note D l'événement « il mange 2 œufs en chocolat noir ».
   $D = L_1 \cap N_2 \cap N_3 \ \cup\ N_1 \cap L_2 \cap N_3 \ \cup\ N_1 \cap N_2 \cap L_3$.
   Les réunions sont disjointes car à chaque tirage on ne pioche qu'un seul œuf.

Donc $\begin{aligned}[t] \mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}(L_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbf{P}(N_1 \cap L_2 \cap N_3) + \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap L_3) \\ &= \frac{4}{20} \times \frac{16}{19} \times \frac{15}{18} + \frac{16}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{15}{18} + \frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{4}{18} \\ &= 3 \frac{8\times 2\times 3\times 5\times 4}{5\times 4\times 19\times 3\times 3} \\ &= \frac{8}{19} \end{aligned}$

La probabilité que le gourmand mange deux œufs en chocolat noir et un au lait est $\frac{8}{19}$.

4. D'après **1.**, on a $\mathbf{P}(L_2) = \frac{1}{5}$.
Or $\mathbf{P}_{L_1}(L_2) = \frac{3}{19} \neq \frac{1}{5}$ donc $\boxed{L_1 \text{ et } L_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

Correction 9.

1. $\begin{aligned}[t] F &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 2y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2) \quad \text{avec } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E donc $\boxed{F \text{ est un espace vectoriel}}$, et (M_1, M_2) en est une famille génératrice.
Les coordonnées de ces matrices dans la base canonique sont $(1, 2, 0, 1)$ et $(0, -1, 1, 2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le rang de la matrice en colonne est 2, donc la famille (M_1, M_2) est libre.

Donc $\boxed{\text{une base de } F \text{ est } (M_1, M_2), \text{ avec } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } F \text{ est donc de dimension } 2}$.

2. On résout : $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$

On trouve $\begin{cases} x = 5z + 3t \\ y = -4z - 2t \end{cases}$

Donc $\begin{aligned}[t] F &= \{(5z + 3t, -4z - 2t, z, t), (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(5, -4, 1, 0) + t(3, -2, 0, 1), (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((v_1, v_2)) \ \text{ avec } v_1 = (5, -4, 1, 0) \text{ et } v_2 = (3, -2, 0, 1) \end{aligned}$.

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.
(v_1, v_2) est une famille génératrice de F, et les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.
Donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } F \text{ et } f \text{ est de dimension } 2}$.