Devoir Maison n°25

pour mardi 8 avril, 10h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Démontrer 3 (au moins !) relations suivantes parmi les 6 proposées :

(a) $\dfrac{\ln(n)}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(b) $\sqrt{n}(\ln(n))^4 = o\left(n^2\ln(n^2)\right)$

(c) $\dfrac{\ln(n^2+n)}{n} = O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$

(d) $\dfrac{4n^3 - \sqrt{n^5+3n^4}}{(\sqrt{2n}+\sqrt{n})^4} \sim \dfrac{1}{n}$

(e) $\dfrac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}} \sim \sqrt{n}$

★ **(f)** $\dfrac{n^2\ln(n)}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

Exercice 2.

Étudier la convergence ou divergence des suites ci-dessous :
(*on peut, ou pas, utiliser les équivalents, ils sont parfois bien adaptés, parfois moins pratiques ...*)

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{4^k}$

$v_n = \sqrt[n]{n}$

$w_n = \dfrac{e^{n+1} - \ln(n) - 3^n}{e^{2n} - 2n}$

$x_n = \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$

Exercice 3. (à partir de mercredi soir)

1. On appelle A l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

★ **2.** Soit $B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (u_n) = o(n^2)\}$, montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. On note $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, XP' = P\}$.
Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Devoir Maison n°25

pour mardi 8 avril, 10h

Version « moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

Démontrer les relations suivantes.

(a) $\dfrac{\ln(n)}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(e) $\dfrac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}} \sim \sqrt{n}$

Exercice 2.

Étudier la convergence ou divergence des suites ci-dessous :
(*on peut, ou pas, utiliser les équivalents, ils sont parfois bien adaptés, parfois moins pratiques ...*)

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{4^k}$

$w_n = \dfrac{e^{n+1} - \ln(n) - 3^n}{e^{2n} - 2n}$

Exercice 3. (à partir de mercredi soir)

1. On appelle A l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1)$.
Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3. On note $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, XP' = P\}$.
Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.