Corrigé du DM n°25

Correction 1.

(a) $\dfrac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\ln(n)}{n} \times \sqrt{n} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Or par le théorème des croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$ donc $\boxed{\dfrac{\ln(n)}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

(b) $\dfrac{\sqrt{n}(\ln(n))^4}{n^2\ln(n^2)} = \dfrac{\ln(n)^4}{n^{\frac{3}{2}} \times 2\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)^3}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^3}{2n^{\frac{3}{2}}} = 0$ (théorème des croissances comparées).

Donc $\boxed{\sqrt{n}(\ln(n))^4 = o\left(n^2\ln(n^2)\right)}$.

(c) $\dfrac{\frac{\ln(n^2+n)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = \dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n^2(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \dfrac{2\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 2 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 0$ (quotient) or, toute suite convergente est bornée, donc $\dfrac{\frac{\ln(n^2+n)}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}}$ est bornée.

Donc $\boxed{\dfrac{\ln(n^2+n)}{n} = O\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$.

(d) ⋆ $n^5 + 3n^4 \sim n^5$ (polynôme) donc $\sqrt{n^5+3n^4} \sim \sqrt{n^5} \sim n^{2,5}$ (puissances d'équivalents).
or $n^{2,5} = o(4n^3)$ donc (d'après ④) $\sqrt{n^5+3n^4} = o(4n^3)$
donc $4n^3 - \sqrt{n^5+3n^4} \sim 4n^3$ (d'après ①').

⋆ $\sqrt{n} = o(\sqrt{2}n)$ (puissances) donc $\sqrt{2}n + \sqrt{n} \sim \sqrt{2}n$ (①') donc $(\sqrt{2}n+\sqrt{n})^4 \sim 4n^4$ (puissances d'équivalents).

Donc par quotient $\boxed{\dfrac{4n^3 - \sqrt{n^5+3n^4}}{(\sqrt{2}n+\sqrt{n})^4} \sim \dfrac{4n^3}{4n^4} \sim \dfrac{1}{n}}$.

(e) $\dfrac{\frac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}}}{\sqrt{n}} = \dfrac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{n}\sqrt{4n+5}}$

⋆ $\ln(n^3) = 3\ln(n) = o(2n)$ (croissances comparées) donc $2n + \ln(n^3) \sim 2n$ (①')

⋆ $4n+5 \sim 4n$ donc $\sqrt{4n+5} \sim \sqrt{4n} \sim 2\sqrt{n}$ (puissances d'équivalents) donc $\sqrt{n}\sqrt{4n+5} \sim n$ (produit)

Donc (quotient) $\dfrac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{n}\sqrt{4n+5}} \sim \dfrac{2n}{2n} \sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{n}\sqrt{4n+5}} = 1$.

Donc $\boxed{\dfrac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}} \sim \sqrt{n}}$

(f) $\dfrac{\frac{n^2\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^4}} = \dfrac{n^6\ln(n)}{2^n} = \dfrac{n^6}{(\sqrt{2})^n} \times \dfrac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n}$

Or $\sqrt{2} > 1$ donc par les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{(\sqrt{2})^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} = 0$.

Donc $\boxed{\dfrac{n^2\ln(n)}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}$.

Correction 2. (réponses et indications)

- $u_n = 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$: (*calcul de la somme puis opérations*) converge vers 4
- $v_n = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$: (*croissances comparées et composition de limites*) converge vers 1
- $\star$ $3 > 1$ donc $\ln(n) = o(3^n)$
  et $\frac{e^{n+1}}{3^n} = e \times \left(\frac{e}{3}\right)^n$ et $-1 < \frac{e}{3} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{3^n} = 0$ donc $e^{n+1} = o(3^n)$.
  Donc (d'après ③) $e^{n+1} - \ln(n) = o(3^n)$ donc $e^{n+1} - \ln(n) - 3^n \sim -3^n$.
  $\star$ $n = o(e^{2n})$ (croissances comparées) donc $e^{2n} - 2n \sim e^{2n}$
  Donc $w_n \sim \frac{-3^n}{e^{2n}} \sim -\left(\frac{3}{e^2}\right)^n$ donc $\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 0}$ car $e^2 > 3$.

  Attention : *le terme dominant au numérateur est -3^n car $3 > e$! Et ce n'est pas le théorème des croissances comparées qui permet de le prouver, il faut passer par le quotient !*

- $x_n = \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$:
  $x_{16n} = \frac{1}{16n} + \cos\left(\frac{16n\pi}{8}\right) = \frac{1}{16n} + \cos(2n\pi) = 1 + \frac{1}{16n} \to 1$
  $x_{16n+4} = \frac{1}{16n+4} + \cos\left(\frac{(16n+4)\pi}{8}\right) = \frac{1}{16n+4} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{1}{16n+4} + 0 \to 0$
  On a donc deux suites extraites de (x_n) qui ont des limites différentes, donc (x_n) n'a pas de limite.
  $\boxed{(x_n) \text{ diverge}}$.

  Attention : *le théorème d'encadrement ne s'applique pas ici car les suites qui encadrent ne tendent pas vers la même limite.*

Correction 3.

1. Montrons que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
$\star$ La fonction nulle est dans A car c'est une fonction constante, elle a donc la même valeur en 0 et en 1.
$\star$ Soient f et g dans A et λ dans $\mathbb{R}$.
Montrons que $f + \lambda g$ est dans A.
$(f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0)$ (par définition de + et . dans l'espace des fonctions)
et $(f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1)$.
Or $f(0) = f(1)$ car $f \in A$ et $g(0) = g(1)$ car $g \in A$.
Donc $f(0) + \lambda g(0) = f(1) + \lambda g(1)$ donc $(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(1)$ donc $f + \lambda g \in A$.
Donc $\boxed{A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

3. $\star$ Montrons que le polynôme nul est dans C.
On note N le polynôme nul, alors $N' = 0$ et $XN' = 0 = N$ donc N est bien dans C.
$\star$ Soient P et Q dans C, et λ dans $\mathbb{R}$, montrons que $P + \lambda Q$ est dans C.
$(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$ donc
$$\begin{aligned} X(P + \lambda Q)' &= XP' + X\lambda Q' \\ &= P + \lambda XQ' \quad \text{(car } P \text{ est dans } C\text{)} \\ &= P + \lambda Q \quad \text{(car } Q \text{ est dans } C\text{)} \end{aligned}$$
Donc $P + \lambda Q$ est dans C.
Donc $\boxed{C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.