Devoir Maison n°21

pour Lundi 10 mars 2025, 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trouver une matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = I + J$, puis calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et des relations $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une expression de b_n en fonction de n.

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{a_n}{2^n}$.

- **(a)** Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.
- **(b)** En déduire une expression de c_n puis de a_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

4. En déduire une expression de M^n sous la forme d'un tableau de nombres.

5. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **(a)** Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
- **(b)** Calculer $P^{-1}AP$.
- **(c)** Démontrer que pour tout entier naturel n, $M^n = P^{-1}A^nP$.
- **(d)** En déduire les quatre coefficients de A^n.

Exercice 3.

Soient $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$. Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On effectue p tirages avec remise.

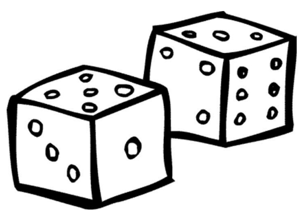
1. Quel est le nombre d'issues possibles ?

2. On note A l'événement « les numéros des boules tirées sont tous distincts ».
Déterminer la probabilité de A.

3. Soit B : « au moins deux des boules tirées portent le même numéro », déterminer la probabilité de B.

★ **4.** Quelle est la probabilité que exactement deux des boules tirées portent le même numéro ?

Exercice 4.



1. On lance 4 fois de suite un dé à 6 faces équilibré.
Quelle est la probabilité d'avoir au moins un 6 ?

2. On lance 24 fois de suite deux dés à 6 faces équilibrés.

- **(a)** Proposer (en le justifiant !) un univers pour l'expérience, et donner son cardinal.
- **(b)** Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un double 6 au cours des 24 lancers.

3. **Simulation Python.** *réaliser la simulation sur l'ordinateur, et écrire sur la copie le programme et toutes les commandes utilisées*
En important la bibliothèque `random` (`from random import *`) on dispose de la commande `randint(1,6)` qui renvoie un nombre entier aléatoire entre 1 et 6, autrement dit cela permet de simuler un lancer de dé.
   - **(a)** Écrire une fonction `lancers()` qui simule les 4 lancers de dé et renvoie 1 s'il y a au moins un 6, et 0 sinon.
   Utiliser cette fonction pour faire une simulation de 10000 fois cette expérience (10000 fois les 4 lancers) et qui détermine la proportion des fois où on a obtenu au moins un 6 sur les 4 lancers.
   Comparer la valeur obtenue au résultat de la question **1.**.
   - ★ **(b)** Procéder de manière analogue pour simuler la deuxième expérience (créer la fonction `lancer2()` pour simuler 24 lancers de 2 dés).
   Commenter les résultats.

Exercice 5. équations, inéquations, signes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :
   - **(a)** $2\sin^2(x) - 3\sin(x) - 2 = 0$
   - **(b)** $2x^4 - 7x^2 + 6 > 0$
   - **(c)** $|x-2| > 1$
   - ★ **(d)** $|x+3| \leqslant |2x-1|$
2. Étudier le signe des expressions suivantes :
   - **(a)** $(2x-5)\ln(2x^2 - 12x + \frac{37}{2})$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$
   - **(b)** $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{-2x+1}$ pour x dans $\mathbb{R}\backslash\{-3; \frac{1}{2}\}$
   - **(c)** $3xe^{2x} + x^2e^{2x}$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: **(a)** $z^2 = 5 - 12i$ **(b)** $(1+z)^4 = 16$.

★ Exercice 6.

Quelques définitions et notations :
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant n nombres réels strictement positifs quelconques, on appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel m_a défini par :

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

On appelle moyenne géométrique de ces nombres le nombre réel m_g défini par :

$$m_g = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

On appelle moyenne harmonique de ces nombres le nombre réel m_h défini par :

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

1. Justifier que pour tous réels a_k strictement positifs, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{m_a} = n$.
2. On admet l'inégalité $\ln(x) \leqslant x - 1$ valable pour tout réel x strictement positif.
En appliquant cette inégalité à chacun des réels $\frac{a_k}{m_a}$, et en utilisant le résultat la question **1.**, montrer que $\ln(m_g) \leqslant \ln(m_a)$ et en déduire que $m_g \leqslant m_a$.
3. En appliquant l'inégalité précédente aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leqslant m_g$.
4. Déduire des questions précédentes que $m_h \leqslant m_a$.
En déduire que pour tous nombres réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$$