Corrigé du DM n°20

Correction 1.

(a) La matrice des vecteurs en colonnes est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Par opérations sur les lignes, on trouve que la matrice est de rang 2, or elle a 3 colonnes donc $\boxed{\text{cette famille n'est pas libre}}$.

De plus, la matrice a 4 lignes et est toujours de rang 2, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

Raccourci possible : *il y a 3 vecteurs mais on est dans $\mathbb{R}^4$ donc la famille ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^4$, car il faudrait 4 pivots, donc au moins 4 colonnes donc au moins 4 vecteurs.*

(b) La matrice des vecteurs en colonnes est $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ \frac{1}{3} & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Par opérations sur les lignes, on trouve que A est de rang 2.

Or elle a 3 colonnes donc $\boxed{\text{la famille n'est pas libre}}$.

Et elle a 2 lignes donc $\boxed{\text{la famille est génératrice de } \mathbb{R}^2}$.

Raccourcis possibles : *il y a 3 vecteurs et on est dans $\mathbb{R}^2$ donc 2 coordonnées et 2 lignes dans la matrice, donc il ne peut y avoir que 2 pivots, donc au moins une inconnue secondaire, donc la famille est liée.*

Les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$, donc ils suffisent à eux deux à exprimer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Correction 2.

On note A_m la matrice des vecteurs en colonne, on va chercher son rang :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{matrix}$$

- si $m \neq 1$, $A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$$

On étudie les valeurs pour lesquelles $-m^2 - m + 2$ s'annule :

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ et $m_1 = 1$ et $m_2 = -2$

Donc si $m = -2$, la matrice est de rang 2, et si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors A_m est de rang 3.

- si $m = 1$, $A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc la matrice est de rang 1.

Donc

si $m = 1$ ou -2 :	le rang n'est pas égal au nombre de lignes donc la famille de vecteurs <u>n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$</u>.
	le rang n'est pas égal au nombre de colonnes, donc <u>la famille est liée</u>.
si $m \neq 1$ et $m \neq -2$:	le rang est égal au nombre de lignes donc <u>la famille est libre</u>,
	le rang est égal au nombre de colonnes donc <u>la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$</u>.

Correction 4.

1. On effectue deux tirages successifs et sans remise de numéros entre 1 et 10.
Donc $\boxed{\text{l'univers est l'ensemble des 2-listes d'éléments distincts de } [\![1,10]\!]}$.
Et donc $\boxed{\text{le cardinal de l'univers est } 10 \times 9 \text{ soit } 90}$.

2.
- $A = [\![2,10]\!] \times \{1\}$ donc $\text{card}(A) = 9 \times 1 = 9$.
Or les boules sont identiques au toucher, donc les issues sont équiprobables, donc $\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}}$.
- $B = \{1\} \times [\![2,9]\!] \cup [\![2,9]\!] \times \{1\}$ et la réunion est disjointe donc $\text{card}(B) = 9 + 9 = 18$
donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}}$.
- C est l'ensemble des 2-listes d'éléments distincts de $[\![1,4]\!]$, donc $\text{card}(C) = 4 \times 3 = 12$
donc $\boxed{\mathbf{P}(C) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}}$.
- $D = \displaystyle\bigcup_{k=2}^{10} \{k\} \times [\![1,k-1]\!]$.
La réunion est disjointe, et pour tout k de $[\![2,10]\!]$, $\text{card}(\{k\} \times [\![1,k-1]\!]) = 1 \times (k-1) = k-1$
Donc $\text{card}(D) = \displaystyle\sum_{k=2}^{10}(k-1) = \sum_{p=1}^{9} p = \frac{9 \times 10}{2} = 45$.
Donc $\boxed{\mathbf{P}(D) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}}$