Corrigé du DM n°1

Correction 1.

1. $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$ et $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Donc $\boxed{I\left(-\dfrac{1}{2}; 2; 1\right)}$

De même, $x_J = \dfrac{-2+2}{2} = 0$ et $y_J = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $z_J = \dfrac{3+5}{2} = 4$ donc $\boxed{J\left(0; \dfrac{1}{2}; 4\right)}$.

2.
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{16+1+4} \\ &= \boxed{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BJ &= \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4\right)^2 + (4-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 25} \\ &= \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{49}{4} + \frac{100}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{153}{4}} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{153}}{2}} \end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 4-0 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 1-0 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ $\quad 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}}$

4. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$. Et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - 0 \\ z_D - 3 \end{pmatrix}$.

Or on veut $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{u}$.

Donc $\begin{cases} x_D + 2 = -6 \\ y_D - 0 = 3 \\ z_D - 3 = -9 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_D = -6-2 \\ y_D = 3 \\ z_D = -9+3 \end{cases}$ donc $\boxed{D(-8; 3; -6)}$.

Correction 2.

1. Dans la base $\mathcal{B}$: $\overrightarrow{u} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -17 \\ 4 \end{pmatrix}}$.

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas proportionnelles ($-\frac{3}{2} \times 2 = -3$ mais $-\frac{3}{2} \times 3 \neq 4$).
Donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \text{ est une base du plan}}$.

3. • On note (x, y) les coordonnées de $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\mathcal{B}'$: alors $\overrightarrow{\imath} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$.
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ soit $\begin{cases} 1 = 2x - 3y & (1) \\ 0 = 3x + 4y & (2) \end{cases}$

D'après (2), $x = -\dfrac{4}{3}y$ donc en remettant dans (1),
$$\begin{aligned} 1 &= 2\times(-\tfrac{4}{3}y) - 3y \\ 1 &= \frac{-8}{3}y - \frac{9}{3}y \\ 1 &= -\frac{17}{3}y \\ y &= -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

Donc $x = -\dfrac{4}{3} \times \left(-\dfrac{3}{17}\right) = \dfrac{4}{17}$.

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \vec{\imath} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ sont } \left(\frac{4}{17};\frac{-3}{17}\right)}$.

- Coordonnées de $\vec{v}$: on cherche x et y tels que $\vec{v} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2}$.
$$\vec{v} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2} \iff \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 = 2x - 3y & (1)\\ -1 = 3x + 4y & (2)\end{cases}$$
D'après (1), $2x = 1 + 3y$ donc $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}y$.
En remplaçant dans (2),
$$\begin{aligned} -1 &= 3\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}y\right) + 4y \\ -1 &= \frac{3}{2} + \frac{9}{2}y + \frac{8}{2}y \\ -\frac{5}{2} &= \frac{17}{2}y \\ y &= -\frac{5}{17} \end{aligned}$$
Donc $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{5}{17}\right) = \dfrac{17}{34} - \dfrac{15}{34} = \dfrac{2}{34} = \dfrac{1}{17}$.
Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \vec{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ sont } \left(\frac{1}{17};\frac{-5}{17}\right)}$.
- $\vec{u} = -3\vec{u_1} + 2\vec{u_2} - 5\left(\dfrac{1}{17}\vec{u_1} - \dfrac{5}{17}\vec{u_2}\right) = \left(-3 - \dfrac{5}{17}\right)\vec{u_1} + \left(2 + \dfrac{25}{17}\right)\vec{u_2} = -\dfrac{56}{17}\vec{u_1} + \dfrac{59}{17}\vec{u_2}$.
Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \vec{u} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ sont } \left(-\frac{56}{17};\frac{59}{17}\right)}$.

Correction 3.

1. $\boxed{(\vec{u},\vec{v}) \text{ est une base du plan puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.}}$
2. **(a)** $\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OA} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} = -\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$
Donc $\boxed{A(-1,-4)_{\mathcal{R}_1}}$.

   (b) On cherche x et y tels que $\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$ soit $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} + y\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$.
Donc on résout $\begin{cases} 2 = 2x - y \\ -3 = x + 3y \end{cases}$.
On trouve $x = \dfrac{3}{7}$ et $y = -\dfrac{8}{7}$, donc $\boxed{A\left(\frac{3}{7}, -\frac{8}{7}\right)_{\mathcal{R}_2}}$.

   (c) On cherche x et y tels que $\overrightarrow{\Omega A} = x\vec{u} + y\vec{v}$ c'est-à-dire, en prenant les coordonnées dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\begin{cases} -1 = 2x - y \\ -4 = x + 3y \end{cases}$
On trouve $x = y = -1$ donc $\boxed{A(-1,-1)_{\mathcal{R}_3}}$.