Corrigé du DM n°11

Pour démontrer une égalité (Rappels !!!) :

Si on nous demande de montrer que $A = B$: 2 possibilités.

1. *on calcule A, puis on calcule B, et on conclut.*

$A = \ldots\ldots$	$B = \ldots\ldots$
$\quad = \ldots\ldots$	$\quad = \ldots\ldots$
$\quad = \ldots\ldots$	$\quad = \ldots\ldots$
$\quad = \ldots\ldots$	

même résultat

Donc $\boxed{A = B}$.

2. *on calcule A pour le mettre sous la forme de B (ou inversement).*

$A = \ldots\ldots$ *ou* $B = \ldots\ldots$

$\quad = \ldots\ldots \qquad\qquad \quad = \ldots\ldots$

$\quad = B \qquad\qquad\qquad \quad = A$

Donc $\boxed{A = B}$.

3. *on peut aussi rédiger de la façon suivante, mais elle est plus risquée !!*

$A = B \iff \ldots = \ldots$

$\quad\iff \ldots = \ldots$

$\quad\iff 0 = 0$ * cette égalité est toujours vraie

* *ou toute autre égalité explicitement vraie*

Donc $\boxed{\text{A=B}}$.

Par exemple, pour montrer avec la méthode 3. que $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2e^{-x}+2} = \dfrac{e^x}{2e^x+2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{2e^{-x}+2} = \frac{e^x}{2e^x+2} \iff \frac{e^x}{(2e^{-x}+2)e^x} = \frac{e^x}{2e^x+2}$$

$$\iff \frac{e^x}{2e^{-x}e^x+2e^x} = \frac{e^x}{2e^x+2}$$

$$\iff \frac{e^x}{2+2e^x} = \frac{e^x}{2e^x+2} \text{ ce qui est vrai pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

Donc l'égalité de départ est vraie : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{2e^{-x}+2} = \dfrac{e^x}{2e^x+2}}$.

Correction 1.

1. • $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $v(x) = \ln(x)$.

$\star$ u est une fraction rationnelle, $1-x \neq 0 \iff x \neq 1$ donc $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\star$ $\mathcal{D}_v =]0, +\infty[$

$\star$ On résout $u(x) > 0$: $1 + x > 0 \iff x > -1$ et $1 - x > 0 \iff 1 > x$

donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1;1[}$, ce qui est symétrique par rapport à 0.

- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = \ln\left(\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
  Et $-f(x) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
  Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

2. • $\forall x \in \mathbb{R},\ -g(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

$$\begin{aligned}
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}\right)\\
&= \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right)\\
&= g(-x)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

★ $g(x) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = \sqrt{x^2+1}+x$.
$\star$ $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \geqslant 0$ donc la composée par la racine carrée est bien définie ;
$\star$ $\mathcal{D}_v =]0, +\infty[$.
$\star$ montrons que pour tout réel x, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$:
$-$ si $x \geqslant 0$: on a toujours $x^2+1 \geqslant 1$ donc avec l'application de la racine carrée croissante, $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x^2+1}+x \geqslant 1+x > 0$
$-$ si $x < 0$: $x^2+1 > x^2$, donc comme la fonction racine carré est strictement croissante, on a $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$ soit $-x < \sqrt{x^2+1}$ donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

Correction 2.

1. $2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + 3\ln(2) = -2\ln(4) + 3\ln(2) = -4\ln(2) + 3\ln(2) = -\ln(2) = \boxed{\ln(\frac{1}{2})}$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2e^{-x}+2} = \dfrac{e^x}{(2e^{-x}+2)e^x} = \dfrac{e^x}{2e^{-x}e^x+2e^x} = \boxed{\dfrac{e^x}{e^x+2}}$ (car $e^{-x}e^x = e^0 = 1$)

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2 - \dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{2(1+e^x)-2}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2}{1+e^x} = \dfrac{2e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \boxed{\dfrac{2}{1+e^{-x}}}$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{1-x}e^{3x-2} = e^{1-x+3x-2} = e^{2x-1} = e^{-1}e^{2x} = \boxed{\frac{1}{e}e^{2x}}$

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x} = \boxed{e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 2}$

Correction 3.

1. D'après l'énoncé, $f(20) = 60$.

$$\begin{aligned}
80e^{-k\times 20} + 20 = 60 &\iff 80e^{-20k} = 40 \quad .\\
&\iff e^{-20k} = \tfrac{1}{2}\\
&\iff -20k = \ln(\tfrac{1}{2})\\
&\iff k = \tfrac{\ln(2)}{20}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{le coefficient } k \text{ vaut } \frac{\ln(2)}{20}}$.

2. $f(30) = 80e^{-\frac{\ln(2)}{20}\times 30} + 20 = 80e^{-\frac{3}{2}\ln(2)} + 20 = 80 \times \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + 20 = 80 \times \frac{\sqrt{2}}{4} + 20 = 20(\sqrt{2}+1)$

Et $\sqrt{2} \approx 1,4$ donc $f(30) \approx 20 \times 2,4 \approx 48$.

$\boxed{\text{Au bout d'une demi heure, le café sera à } 20(\sqrt{2}+1) \text{ soit environ 48 degrés.}}$

3. On cherche t tel que $f(t) = 30$.

$f(t) = 30 \iff 80e^{-\frac{\ln(2)}{20}t} + 20 = 30 \iff e^{-\frac{\ln(2)}{20}t} = \frac{1}{8} \iff \frac{\ln(2)}{20}t = \ln(8) \iff t = 20\frac{\ln(8)}{\ln(2)} \iff t = 60.$

Donc $\boxed{\text{le café sera à } 30^\circ \text{ au bout d'une heure}}$.