Corrigé du DM n°10

Correction 1.

1.
$$\begin{aligned} A &= \left[-\tfrac{5}{2}x^2 - e^{-x+1}\right]_1^2 \\ &= -\tfrac{5}{2}\times 2^2 - e^{-2+1} - \left(-\tfrac{5}{2}\times 1^2 - e^{-1+1}\right) \\ &= -\tfrac{20}{2} - e^{-1} + \tfrac{5}{2} + 1 \\ &= \boxed{-\tfrac{13}{2} - e^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left[-\tfrac{1}{2}\cos(x^2+1)\right]_0^1 \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos(2) + \tfrac{1}{2}\cos(1) \\ &= \boxed{\tfrac{1}{2}(\cos(1) - \cos(2))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\ln(|\cos(x)|)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln(1) \\ &= \boxed{-\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \left[\frac{3}{\pi}\sin\left(\pi t + \tfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^1 \\ &= \tfrac{3}{\pi}\sin\left(\pi + \tfrac{\pi}{3}\right) - \tfrac{3}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{3}{\pi}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \tfrac{3}{\pi}\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{-\tfrac{3\sqrt{3}}{\pi}} \end{aligned}$$

2. **(a)** $\forall x < 1, \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x-5}{(x-1)^2}$.

Donc $\boxed{\dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}}$.

(b)
$$\begin{aligned} \int_{1-e}^0 \frac{2x-5}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{1-e}^0 \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int_{1-e}^0 \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[2\ln(|x-1|)\Big]_{1-e}^0 - 3\Big[-\tfrac{1}{x-1}\Big]_{1-e}^0 \\ &= 2\ln(1) - 2\ln(e) - 3\Big(1 - (-\tfrac{1}{-e})\Big) \\ &= \boxed{-5 + \tfrac{3}{e}} \end{aligned}$$

Correction 2.

$$\begin{aligned} |z-1| = |z-i| &\iff |z-1|^2 = |z-i|^2 \qquad \text{les modules sont positifs} \\ &\iff (z-1)\overline{(z-1)} = (z-i)\overline{(z-i)} \\ &\iff (z-1)(\overline{z}-\overline{1}) = (z-i)(\overline{z}-\overline{i}) \\ &\iff (z-1)(\overline{z}-1) = (z-i)(\overline{z}+i) \\ &\iff z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} + iz - i\overline{z} - i^2 \\ &\iff -(z+\overline{z}) + 1 = i(z-\overline{z}) + 1 \\ &\iff -2\mathrm{Re}\,(z) = i \times 2i\mathrm{Im}\,(z) \\ &\iff \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{a + ai, a \in \mathbb{R}\}}$.

Interprétation : on note M le point d'affixe z, A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i. Alors $|z-i|$ est la distance entre le M et B et $|z-1|$ est la distance entre M et A.

Donc on cherche l'ensemble des points équidistants de A et B, ce qui correspond à la droite $y = x$. L'ensemble trouvé avec partie réelle et partie imaginaire égales correspond bien.

Correction 3.

I est le milieu de $[AB]$ donc $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$ et J est le milieu de $[AC]$ donc $z_J = \frac{1}{2}(z_A + z_C)$.

Ainsi, $z_{\overrightarrow{IJ}} = \frac{1}{2}(z_A + z_C) - \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(z_C - z_B) = \frac{1}{2}z_{\overrightarrow{BC}}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $\boxed{(IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles}}$, et $\|\overrightarrow{IJ}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$ donc $\boxed{IJ = \frac{1}{2}BC}$.

Correction 4. réponses

1. $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $\quad z_2 = 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad$ et $\quad z_4 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. $z_1 \times z_2 = 12\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ $\quad \dfrac{z_4}{z_1} = \frac{2}{3}e^{i\pi}$ $\quad \dfrac{z_2}{z_4} = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ $\quad$ et $\quad (z_3)^6 = 4^6 e^{i2\pi}$.