CORRIGÉ DU CONCOURS BLANC

Correction 1. Inspiré de CCP 2014 TSI

Partie A.

I. 1. Soient u et v dans $\mathbb{R}^2$, et λ dans $\mathbb{R}$.

On note $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(u + \lambda v) &= f((x + \lambda x', y + \lambda y')) \\ &= (4(x + \lambda x') - 6(y + \lambda y'), x + \lambda x' - (y + \lambda y')) \\ &= (4x + 4\lambda x' - 6y - 6\lambda y', x + \lambda x' - y - \lambda y') \\ &= (4x - 6y, x - y) + (4\lambda x' - 6\lambda y', \lambda x' - \lambda y') \\ &= (4x - 6y, x - y) + \lambda(4x' - 6y', x' - y') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. a. $f(a) = (4 \times 2 - 6 \times 3, 2 - 3) = (-10, -1)$

Les deux vecteurs a et $f(a)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.

Et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc $(a, f(a))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Donc d'après la définition de l'énoncé, f est cyclique.

3. $f^2(a) = f(f(a)) = f((-10, -1)) = (4 \times (-10) - 6 \times (-1), -10 + 1) = (-34, -9)$

On cherche α et β tels que $(-34, -9) = \alpha a + \beta f(a)$

Or $\alpha a + \beta f(a) = (2\alpha - 10\beta, 3\alpha - \beta)$

$$\text{Donc } (-34, -9) = \alpha a + \beta f(a) \iff \begin{cases} 2\alpha - 10\beta = -34 \\ 3\alpha - \beta = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 5\beta = -17 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 3\alpha - \beta = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 5\beta = -17 \\ 14\beta = 42 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{cases}$$

Donc $\beta = \frac{42}{14} = 3$ et $\alpha = -17 + 5 \times 3 = -2$.

Les coordonnées de $f^2(a)$ dans la base $(a, f(a))$ sont $(-2, 3)$.

4. L'application identité n'est pas cyclique, car pour tout u de $\mathbb{R}^2$, $\text{Id}(u) = u$, et la famille (u, u) n'est pas libre.

$$\text{II. 1. } (x, y, z) \in \text{Ker}(g) \iff (2x, 4y - 6z, y - z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y - 6z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

D'après L_1 , $x = 0$ et d'après L_3 , $y = z$ donc dans L_2 , $-2z = 0$ donc $z = 0$ et donc $y = 0$.

Donc $\text{Ker}(g) = \{(0, 0, 0)\}$, donc g est injective.

Or g est un endomorphisme et $\dim(\mathbb{R}^3)$ est finie, donc g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. $\forall v \in \mathbb{R}^3, g^2(v) - 3g(v) + 2v = 0$

Donc pour tout v de $\mathbb{R}^3$, il existe une combinaison linéaire de $g^2(v)$, $g(v)$ et v qui soit égale au vecteur nul avec des coefficients pas nuls, donc la famille est liée, donc elle ne peut pas former de base.

Donc g n'est pas cyclique.

Partie B.

I. 1. a. 1 est constant donc $f(1) = 1 - 1 = \boxed{0}$. Et $f(X) = X + 1 - X = \boxed{1}$

$$f(X^2) = (X + 1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = \boxed{2X + 1}$$

b. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $(X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i 1^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i = \binom{k}{k} X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$.

Or $\binom{k}{k} = 1$, donc $(X + 1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$.

$\binom{k}{k-1} \neq 0$ donc $\boxed{\delta(X^k) \text{ est exactement de degré } k-1}$.

2. $\deg(f(X^{n-1})) = n-2$, et donc $\deg(f(f(X^{n-1}))) = n-3$ c'est-à-dire $\deg(f^2(X^{n-1})) = n-3$.

Par récurrence finie, on peut montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\deg(f^k(X^{n-1})) = n-1-k$.

Donc les degrés de $(X^{n-1}, f(X^{n-1}), f^2(X^{n-1}), \dots, f^{n-1}(X^{n-1}))$ sont échelonnés, donc cette famille est libre.

Or elle contient $n-1+1$ soit n vecteurs, et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$ donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc $\boxed{f \text{ est cyclique}}$.

II. 1. Si P est un polynôme non constant, alors son degré est supérieur ou égal à 1, donc d'après la question **I.2.**, $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1 \geq 0$ donc $P \notin \text{Ker}(f)$.

Donc $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

De plus, d'après **I.1.a.** $1 \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Vect}(1) \subset \text{Ker}(f)$ (car $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel) et donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker}(f)$.

Donc $\boxed{\text{Ker}(f) \text{ est l'ensemble des polynômes constants}}$.

2. $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si P n'est pas constant, alors $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1 \leq n-2$.

Et si P est constant, $f(P) = 0$.

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg(f(P)) \leq n-2$.

Donc $\boxed{\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]}$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Donc $n = 1 + \dim(\text{Im}(f))$ soit $\dim(\text{Im}(f)) = n-1$.

Or $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\dim(\mathbb{R}_{n-2}[X]) = n-1$.

Donc $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$.

Correction 2.**Partie A.**

1. Y_2 désigne le numéro de la case sur laquelle se trouve la puce au bout de 2 sauts.

Il y a 4 issues possibles pour ces 2 sauts :

- $G_1 \cap G_2$ ce qui donne $Y_2 = -1 - 1 = -2$
- $G_1 \cap D_2$ ce qui donne $Y_2 = -1 + 1 = 0$
- $D_1 \cap G_2$ alors $Y_2 = 1 - 1 = 0$
- $D_1 \cap D_2$ alors $Y_2 = 1 + 1 = 2$

On en déduit $Y_2(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$.

$\mathbf{P}(Y_2 = -2) = \mathbf{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbf{P}(G_1) \times \mathbf{P}(G_2)$ car les différents sauts sont indépendants.

Donc $\mathbf{P}(Y_2 = -2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Et $\mathbf{P}(Y_2 = 0) = \mathbf{P}(G_1 \cap D_2) + \mathbf{P}(D_1 \cap G_2)$ (car la réunion est disjointe) donc comme précédemment,

$\mathbf{P}(Y_2 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Et $\mathbf{P}(Y_2 = 2) = \mathbf{P}(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{4}$.

On peut résumer :

y_k	-2	0	2
$\mathbf{P}(Y_2 = y_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. $E(Y_2) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0$

$E((Y_2)^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ donc $V(X) = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2}$

$E(Y_2) = 0$ et $V(Y_2) = \frac{1}{2}$.

3. $Y_3(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Partie B.

1. a. La puce répète n fois la même épreuve : sauter. Les épreuves sont indépendantes les unes des autres, et on appelle succès l'issue « la puce saute à droite », de probabilité $\frac{1}{2}$.

X_n compte le nombre de succès, donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b. $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et pour k dans $X_n(\Omega)$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

2. Il y a X_n sauts à droite donc la puce se déplace de X_n cases vers la droite, et il y a $n - X_n$ sauts à gauche, donc la puce se déplace de $(n - X_n)$ cases à gauche.

Donc $Y_n = X_n - (n - X_n) = 2X_n - n$.

3. $E(Y_n) = 2E(X_n) - n = 2 \times n \times \frac{1}{2} - n = 0$

Et $V(Y_n) = 2^2 V(X_n) = 4n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n$.

$E(Y_n) = 0$ et $V(Y_n) = n$.

En moyenne, après n sauts, la puce se retrouve au point de départ.

Partie C.

1. $a_1 = \mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(\text{« à la seconde 1, la puce va à droite »}) = \frac{2}{3}$

2. Pour tout k dans $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, d'après la formule des probabilités totales :

$\mathbf{P}(A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_k) \mathbf{P}_{A_k}(A_{k+1}) + \mathbf{P}(\overline{A_k}) \mathbf{P}_{\overline{A_k}}(A_{k+1})$

$\mathbf{P}_{A_k}(A_{k+1})$ est la probabilité que la puce aille à droite à la seconde $k + 1$ sachant qu'elle est déjà allée à droite à la seconde précédente, donc la probabilité est $\frac{2}{3}$.

$\mathbf{P}_{\overline{A_k}}(A_{k+1})$ est la probabilité que la puce aille à droite à la seconde $k + 1$ sachant qu'elle est allée à gauche à la seconde k , donc c'est $\frac{1}{3}$.

Donc $a_{k+1} = a_k \times \frac{2}{3} + (1 - a_k) \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3} a_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a_k$

$= \frac{1}{3} a_k + \frac{1}{3}$

3. a. $\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $b_{k+1} = a_{k+1} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{3} a_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{3} (b_k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{6}$
 $= \frac{1}{3} b_k + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}$
 $= \frac{1}{3} b_k$

b. (b_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$,

donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_k = \frac{1}{3^{k-1}} b_1 = \frac{1}{3^{k-1}} (a_1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}}$.

Donc $a_k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{2}$

4. Par définition, $Z_k(\Omega) = \{-1; 1\}$ et $\mathbf{P}(Z_k = 1) = \mathbf{P}(A_k) = a_k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{2}$
 et donc $\mathbf{P}(Z_k = -1) = 1 - \mathbf{P}(Z_k = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}}$.
 $E(Z_k) = 1 \times (\frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{2}) - 1 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}}) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^k}$.

5. Z_k donne le déplacement à l'instant k , donc en cumulant les déplacements à partir de la position initiale (case 0), jusqu'au n -ième, on obtient bien la position après les n sauts.
 Donc $Y_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$.

Alors, par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(Z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - (\frac{1}{3})^n$.

Correction 3. CCP 2019 : partie A identique, partie B adaptée au programme de TSI1.

Partie A. Étude d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. $u_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 0 dt = \pi$ et $u_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$
 $u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} - \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}$.
 Finalement $u_0 = \pi, u_1 = 2, u_2 = \frac{\pi}{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos^n(t) \geq 0$.
 Donc par positivité de l'intégrale sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
 Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) dt$ par linéarité de l'intégrale.
 Or $\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) = \cos^n(t) (\cos(t) - 1)$ et comme précédemment, $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos^n(t) \geq 0$
 et $\cos(t) \leq 1$ donc $\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) \leq 0$.
 Ainsi, par positivité de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
 Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone (décroissante).

3. Soit $n \geq 1, \cos^{n+1}(t) = \cos(t) \cos^n(t)$.
 On procède à une intégration par parties avec $f(t) = \sin(t)$ et $f'(t) = \cos(t)$
 $g(t) = \cos^n(t)$ et $g'(t) = -n \sin(t) \cos^{n-1}(t)$
 Alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^n(t) dt = [\sin(t) \cos^n(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (-n \sin(t) \cos^{n-1}(t)) dt$
 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt = 0 + n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-1}(t) dt$
 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt = n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) dt - n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt$
 $(n+1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt = n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) dt$
 Donc pour $n \geq 1, (n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1 \geq 1$, donc d'après la question précédente $((n+1)+1)u_{(n+1)+1} = (n+1)u_n$,
 c'est-à-dire $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ donc $v_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1} = v_n$.
 Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
 Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 = 1u_1u_0 = 2\pi$.

5. La suite (u_n) est décroissante, donc pour tout n de $\mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
 De plus, $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1}u_n \leq u_n u_n$ donc $v_n \leq (n+1)u_n^2$.
 Et par le même principe avec $u_{n+1} \geq 0, v_n \geq (n+1)u_{n+1}^2$.
 Or $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2\pi$ donc $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. • $\forall n \geq 0, 2\pi \leq (n+1)u_n^2$ donc $u_n^2 \geq \frac{1}{(n+1)}2\pi$ et la racine carrée est croissante donc $\sqrt{u_n^2} \geq \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}$.
 Or $u_n \geq 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$ donc $u_n \geq \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}$.
 • pour tout $n \geq 1, n-1 \geq 0$ donc $(n-1+1)u_{n-1+1}^2 \leq 2\pi$ c'est-à-dire $nu_n^2 \leq 2\pi$ donc avec les arguments qu'au dessus, $u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 1, \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$.

7. Ainsi, $\forall n \geq 1, \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq 1$ donc $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq 1$.

Or $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$ donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = 1$

autrement dit $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$.

Partie B. Étude d'une somme.

1. $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\cos(t)x \neq 1$ et $\cos^k(t)x^k = (x \cos(t))^k$,

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(t)x^k = \frac{1 - (x \cos(t))^n}{1 - x \cos(t)}}$.

Alors $\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t) dt \right) x^k \right]$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)x^k dt$ car x est une constante pour l'intégrale par rapport à t
 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(t)x^k \right) dt$ par linéarité de l'intégrale
 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (x \cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt$
 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x \cos(t)} dt$ par linéarité de l'intégrale

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, 1[, \sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t) dt}{1 - x \cos(t)}}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x \cos(t)} dt \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos^n(t)}{1 - x \cos(t)} \right| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos^n(t)|}{|1 - x \cos(t)|} dt$.

Or $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\cos^n(t)| \leq 1$ donc $\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x \cos(t)} dt \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1 - x \cos(t)|} dt$.

Alors, pour tout x de $]-1, 1[$, $\left| x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1 - x \cos(t)} dt \right| \leq |x|^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1 - x \cos(t)|} dt$,

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^n = 0$ car $0 \leq |x| < 1$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t) dt}{1 - x \cos(t)} = 0$

donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)}}$.

3. (a) $1 + \tan^2(a) = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$

(b) $\cos(t) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - 2u^2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - 2u^2 \frac{1}{1+u^2} = \frac{1+u^2-2u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

(c) Pour le changement de variable proposé : $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc u va de -1 à 1 .

Et $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc $du = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{t}{2})) dt$ donc $dt = 2\frac{1}{1+u^2} du$.

Et on utilise aussi $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

$$\text{Ainsi, } S(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+u^2-x(1-u^2)} du = \int_{-1}^1 \frac{2}{1-x+(1+x)u^2} du.$$

(d) $S(x) = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-x)\left(1+\frac{1+x}{1-x}u^2\right)} du$

On sait que $x \in]-1, 1[$, donc $\frac{1+x}{1-x} > 0$ on peut poser $v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} u$,

alors $dv = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} du$

v varie entre $-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\text{Donc } S(x) = \int_{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{2}{(1-x)} \frac{1}{1+v^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \left[\arctan(v) \right]_{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \quad \text{car } (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\right) - \arctan\left(-\frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\right) \right)$$

$$S(x) = \frac{4 \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\right)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$$

(car $\arctan$ est impaire)