Dérivabilité.

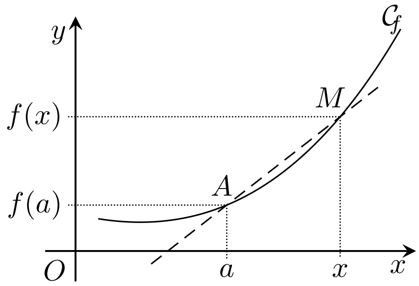
La dérivée est un outil de ***calcul infinitésimal***.
Le nombre dérivé a été conceptualisé par GW. Leibniz (1646-1716) et I. Newton (1642-1727), ce dernier le décrivant comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ». C'est à JL. Lagrange (1736-1813) que l'on doit le nom de ***dérivée*** et la notation $f'(x)$.

I. Dérivation

1) Dérivabilité en un point

a. taux d'accroissement (cf. dérivation numérique)

L'accroissement moyen de la courbe sur un intervalle représente en quelque sorte la « pente moyenne » de la courbe sur cet intervalle.



On note A le point de la courbe d'abscisse a : $A(a, f(a))$,
et M le point de la courbe d'abscisse x : $M(x, f(x))$.

L'***accroissement moyen*** (ou ***taux d'accroissement***) de la fonction f entre a et x est la pente de la droite (AM).
Il se calcule par la formule $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Si l'on pose $x = a+h$ avec h non nul, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemples : L'accroissement moyen de la fonction carré entre 3 et 4 est $\dfrac{4^2-3^2}{4-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Le taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3+h$ est :
$\dfrac{(3+h)^2-3^2}{(3+h)-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On remarque que lorsque h devient très proche de 0, le point M se rapproche du point A, et la droite (AM) devient tangente à la courbe en A : la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est alors la pente de cette tangente, que l'on appelle ***nombre dérivé de la fonction en*** a.

Suite de l'exemple : La limite du taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3+h$ lorsque h tend vers 0 est ....
Ce nombre correspond bien au nombre dérivé de la fonction carré en 3, obtenu par le calcul 2×3^1.

b. dérivabilité en a

Définition.

> Une fonction f est ***dérivable*** en un nombre a de $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
> Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$, c'est le ***nombre dérivé de f en*** a.

Remarque : $f'(a)$ est aussi égal à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsqu'elle existe et est finie.

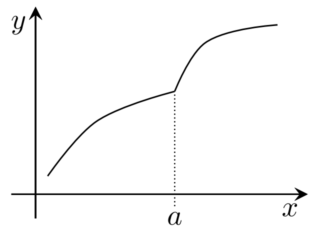
Dérivabilité de la fonction racine carré :
- en $a \in]0, +\infty[$:

c. dérivabilité à gauche et à droite

Définition.

Soit f définie sur I et $a \in I$.

On dit que f est ***dérivable à droite*** en a lorsque $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.
On note alors $f'_d(a)$ cette limite.



On dit que f est ***dérivable à gauche*** en a lorsque ....

....

Propriété.

- Si a n'est pas un bord de I, alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.
  Alors $f'(a) = f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$).
- Si a est le bord supérieur de I ($I = ..., a]$), alors f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a.
- Si a est le bord inférieur de I ....
  ....

Exemple : on note f la fonction valeur absolue, est-elle dérivable en 0 ?

d. Interprétation géométrique

Propriété.

Lorsque f est dérivable en a, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

En effet, ...

....

Autour de a, la tangente est une bonne approximation de la courbe, plus précisément, on peut montrer que l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f'(a)(x-a) + f(a)$ est négligeable devant $x - a$: $\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)}$.

Cette formulation est appelée ***développement limité à l'ordre 1 de f en a***.

On peut aussi l'écrire ainsi : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(a) + (x-a)f'(a)$.

Preuve : montrons que $f(x) - \Big(f(a) + (x-a)f'(a)\Big)$ est négligeable devant $(x-a)$ au voisinage de a.

Conséquence : $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable en } a, \text{ alors } f \text{ est continue en } a}$.

e. Utilisation du taux d'accroissement pour des calculs de limite

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$? (*on connaît cette limite grâce aux équivalents, mais la preuve des équivalents est la suivante :*)

- de même, on montre $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1}$.

2) Dérivabilité sur un intervalle

Définition.

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout point a de I.
Dans ce cas, on appelle ***fonction dérivée*** la fonction notée f', définie sur I qui à un nombre de I associe le nombre dérivé de f à cet endroit :

$$\begin{array}{rccl} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) : \text{nombre dérivé de } f \text{ en } x\text{, coefficient directeur de la tangente en } x \end{array}$$

3) Dérivabilité des fonctions de référence et opérations sur les dérivées

a. fonctions de référence

Théorème.

Les fonctions de référence sont toutes dérivables sur leur ensemble de définition SAUF :

- les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ et non entier (notamment la racine carrée) ne sont pas dérivables en 0 ;
- les fonctions Arcsin et Arccos ne sont pas dérivables en -1 ni en 1 ;
- la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 ;
- la fonction partie entière n'est pas dérivable en k quel que soit le k de $\mathbb{Z}$.

Pour les expressions des fonctions dérivées des fonctions usuelles, on se reportera au tableau du chapitre Révisions de calcul 2 - Dérivées..

b. opérations et dérivation

Somme, produit, quotient, composée de deux fonctions dérivables sont dérivables partout où elles sont définies. Plus précisément :

Théorème.

- Si f et g sont dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, $f\times g$, λf sont dérivables sur I et

  $(f+g)' = \ .....$; $(f\times g)' = \ ....$; $(\lambda f)' = \ .....$

  $\frac{f}{g}$ est dérivable partout où g ne s'annule pas, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \ .....$
- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et

  $\forall x \in I,\ (g\circ f)'(x) = \ ......$

Théorème.

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.
Si de plus, f est dérivable en a de I, alors : f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

Dans ce cas, $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

et donc si f^{-1} est dérivable en x, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Interprétation : la racine carrée n'est pas dérivable en 0 car $0 = 0^2$ et la dérivée de la fonction carré s'annule en 0.

II. Propriétés des fonctions dérivables

1) Variations, extrema

Théorème.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$ (les tangentes ....
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ (les tangentes ....
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$ (les tangentes ....

Remarque très importante : f est strictement croissante lorsque $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et que f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert de I (elle peut s'annuler en des « points isolés », ou un « nombre fini de points » sans que cela ne l'empêche d'être strictement monotone)
Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante bien que sa dérivée s'annule en 0.

Attention : il est important que I soit un intervalle :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Alors $f'(x) =$ .... mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

f est décroissante sur .... et sur ....

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Théorème.

f est définie sur I et soit $a \in I$ qui n'est pas un bord.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ a un extremum local en } a \\ f \text{ est dérivable en } a \end{cases} \quad \text{alors } f'(a) = 0.$$

Attention : la réciproque est fausse, la fonction cube en 0 est un exemple.
Pour que a soit un extremum de f, il faut que f' s'annule et change de signe en a.

Exemples : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$:

$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x - 12$:

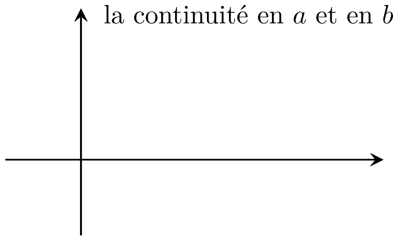
2) Théorème de Rolle (*Michel Rolle, 1652 - 1719*)

Théorème de Rolle.

Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } f(a)=f(b) \end{cases}$, alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Illustration :

la continuité en a et en b est indispensable



Interprétation cinématique : ....

....

....

3) Accroissements finis

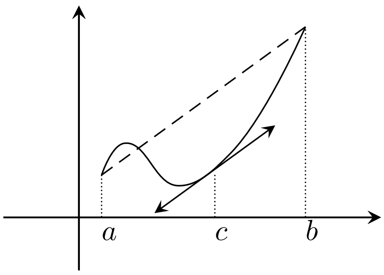
Théorème des accroissements finis.

Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\end{cases}$, alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Interprétation cinématique : ....

....

Démonstration :



On pose $\varphi(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$.

$\star$ φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (car ....)

$\star$ $\varphi(a)=$

$\varphi(b)=$

Donc par le théorème de Rolle, ...

Or $\varphi'(x)=$ .... donc c vérifie ....

Autrement dit $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. $\square$

Propriété : inégalité des accroissements finis.

- Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } \forall x\in]a,b[, m\leqslant f'(x)\leqslant M \end{cases}$ alors $m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$.
- Soit f une fonction $\begin{cases} \text{continue sur } [a,b] \\ \text{dérivable sur }]a,b[\\ \text{telle que } \forall t\in]a,b[, |f'(t)|\leqslant k \end{cases}$ alors $\forall (x,y)\in [a,b]^2$, $|f(y)-f(x)|\leqslant k\,|y-x|$.

Applications :

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$:

- dans les études de suites récurrentes (exercice 8.)

III. Dérivées d'ordres supérieurs

1) Fonctions $\mathcal{C}^k$

Définition.

On dit qu'une fonction f est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I lorsque f est dérivable sur I et f' continue sur I.
$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition.

- On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est dérivable sur I.
  Alors $(f')'$ est notée f'' ou $f^{(2)}$.
  f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si f est deux fois dérivable sur I et que $f^{(2)}$ est continue sur I.
- Les dérivées successives sont définies par récurrence : si f est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $f^{(p)}$ est dérivable sur I, alors f est $p+1$ fois dérivable et $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$.
  Si de plus $f^{(p+1)}$ est continue sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I.
- On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Théorème.

Toutes les fonctions de référence sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

2) Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur et formule de Leibniz

Somme, produit, quotient, composée de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ sont $\mathcal{C}^k$ partout où elles sont définies.
Plus précisément :

Théorème : somme, produit, quotient.

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et f et g dans $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- $f+g$, $f \times g$, λf sont dans $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et

  $(f+g)^{(k)} =$ .... ; $(\lambda f)^{(k)} =$ .....

  $(f \times g)^{(k)} =$ .... (formule de Leibniz)

- si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont $\mathcal{C}^k$ sur I.

Conséquence : les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (car ce sont des sous-espaces vectoriels de ....

Théorème : composition.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Théorème : réciproque.

$$\text{Si } f \text{ est } \begin{cases} \text{de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \ (k \in \mathbb{N}^* \text{ ou } \infty) \\ \text{une bijection de } I \text{ sur } J \\ \text{telle que } \forall x \in I, f'(x) \neq 0 \end{cases} \quad \text{alors } f^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } J.$$

Remarque : la fonction arccosinus est $\mathcal{C}^\infty$ sur ....