Continuité

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $I =]0;\pi[$ par $f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{\sin(x)}$.

1. Justifier que f est continue sur I.

2. Déterminer la limite de f en 0.

3. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui définir son prolongement.

☞ Exercice 2.

On note f la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.
f est-elle continue en 0 ?

Exercice 3.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. En déduire que f est constante.

Exercice 4.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Dresser le tableau des variations de la fonction g (avec limites et extrema).

2. Prouver que l'équation $g(x) = 1$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera α.
Justifier que $\alpha \in [3;4]$.

3. Résoudre l'inéquation $g(x) < 1$ (*utiliser* α).

Exercice 5.

Soit f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
Construire le tableau des variations de f^{-1} sur J.

★ Exercice 6.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. Démontrer que f_n admet une unique racine réelle notée u_n.

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et en déduire que (u_n) converge.

3. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Étudier la parité de f et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

2. **(a)** Démontrer que f admet une bijection réciproque définie et continue sur un intervalle J à préciser.

★ **(b)** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

☞ Exercice 8.

f est une fonction continue sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.
Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-5		4		10
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-8

Combien de solutions admettent les équations **(a)** $f(x) = -2$? **(b)** $f(x) = 2$? **(c)** $f(x) = -6$?
(préciser à chaque fois les intervalles dans lesquels se trouvent les solutions)

(a) $f(x) = -2$:

- sur $]-\infty; -5[$, f est minorée par -1 et $-2 < -1$,
  donc l'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- sur $]-5; 10]$, f a un maximum de valeur ....
  ....

Donc, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = -2 \text{ n'a pas de solution sur l'ensemble de définition de } f}$.

(b) $f(x) = 2$:

- sur $]-\infty; -5[$:
  - $*$ f est continue
  - $*$ f est strictement croissante
  - $*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = +\infty$

  donc, f réalise une bijection de .... dans ....
  Or $2 \in]-1; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]-\infty; -5[$.
- sur $]-5; 10]$ ....
  ....

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 2 \text{ a une solution unique sur l'ensemble de définition de } f}$, et cette solution est strictement plus petite que -5.

(c) *à faire !*