Continuité.

Une fonction est ***continue sur un intervalle*** si on peut tracer sa courbe sans lever le crayon. Autrement dit lorsque l'on se rapproche d'un point a, par la droite ou par la gauche, $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

I. Continuité

Définitions.

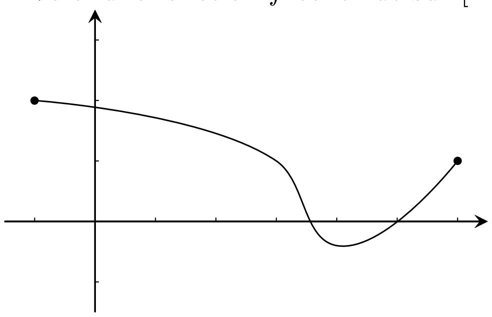
• Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
On rappelle que $\boxed{f \text{ est } \textbf{\textit{continue en }} a \text{ si } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$.
Cela revient à affirmer $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

• f est continue à gauche en a si $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, autrement dit $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
f est continue à droite en a si $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, autrement dit $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

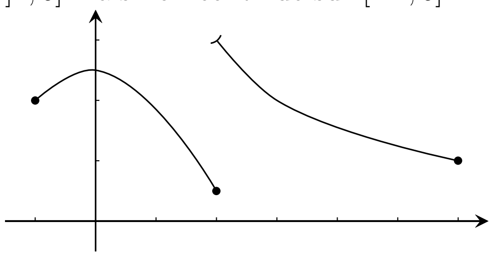
• f est dite ***continue sur un intervalle*** I si elle continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

• Voici une fonction f continue sur $[-1;6]$:



Voici une fonction g continue sur $[-1;2[$ et sur $]2;6]$ mais non continue sur $[-1;6]$:



$g(2) = \ldots$ $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \ldots$ $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \ldots$

....

Cette fonction g qui est continue sur $[-1;2[$ et sur $]2;6]$ mais non continue sur $[-1;6]$, est dite ***continue par morceaux*** sur $[-1;6]$.

• La fonction partie entière ....

....

1) justifier la continuité d'une fonction

continuité des fonctions de référence et usuelles :

• les fonctions polynomiales, et puissances d'exposant entier positif sont continues sur $\mathbb{R}$;

• cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$;
arccos et arcsin sont continues sur $[-1,1]$
arctan est continue sur $\mathbb{R}$;

• la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$;

• la fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$;

• la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$;

• la fonction inverse, et les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ sont continues sur $]-\infty;0[$ et continues sur $]0;+\infty[$;

• une fraction rationnelle est continue sur <u>chacun des intervalles</u> de son ensemble de définition.

opérations sur les fonctions continues :

• la somme, la différence et le produit de fonctions continues sur un même intervalle sont continues sur ce même intervalle.

• le quotient de deux fonctions continues est continu sur <u>chacun des intervalles</u> où le dénominateur est non nul.

• si f est continue en a, et g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.
(« la composée de deux fonctions continues est continue. »)

Exemples :

- $f(x) = \dfrac{x}{3x-4}$

  ....

  ....

- $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$

  ....

  ....

  ....

  ....

Attention : la continuité n'a de sens que sur un intervalle, ainsi on ne dira pas (et n'écrira pas non plus) que g est continue sur $[0,3[\cup]3;+\infty[$.

- $h(x) = \begin{cases} 2x-7 & \text{si } x<3 \\ -1 & \text{si } x=3 \\ -3x+15 & \text{si } x>3 \end{cases}$

  ....

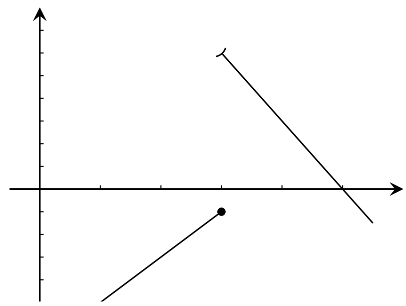
  ....

  ....

  ....

  ....

  ....



Remarque : on peut affirmer que $\mathcal{C}(I)$ est un espace vectoriel : c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
En effet :
⋆ La fonction nulle est continue.
⋆ Soient f et g deux fonctions continues, et λ un réel.
λg est continue car g est continue.
Et puisque la somme de deux fonctions continues est continue, $f+\lambda g$ est continue.
Donc $\mathcal{C}(I)$ est stable par combinaison linéaire. □

2) prolongement par continuité

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

On dit que l'on peut prolonger la fonction f en 0 : la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue ; on l'appelle ***prolongement par continuité de f en*** 0.

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit a une borne finie de $\mathcal{D}_f$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en a si f admet une limite finie en a.
On appelle alors ***prolongement par continuité de f en*** a la fonction suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathcal{D}_f \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ si } x = a \end{cases} \end{array}$$

II. Propriétés des fonctions continues

1) limite de l'image d'une suite

Propriété (rappel).

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue au point x_0 de I.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x_0.

Alors $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Application : soit (u_n) une suite récurrente avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.
On suppose que (u_n) converge vers ℓ.

$\star$ ....

$\star$ ....

....

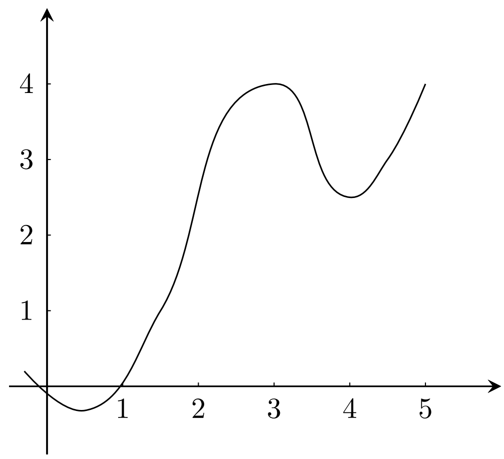
$\star$ .... $\underline{\ell = f(\ell)}$.

Ainsi, pour une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, la limite finie <u>éventuelle</u> est à rechercher parmi les solutions de l'équation $f(x) = x$ (appelées points fixes de la fonction).

Attention : il faut d'abord avoir justifié l'existence de la limite de (u_n) (par théorème de convergence monotone par exemple).

2) valeurs intermédiaires

Principe général : pour tracer la courbe d'une fonction continue, on ne lève pas le crayon, donc si la fonction atteint les valeurs 1 et 3, elle passera par toutes les valeurs intermédiaires entre 1 et 3 : on pourra par exemple trouver au moins une valeur de x telle que $f(x) = 2,5$.



Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.

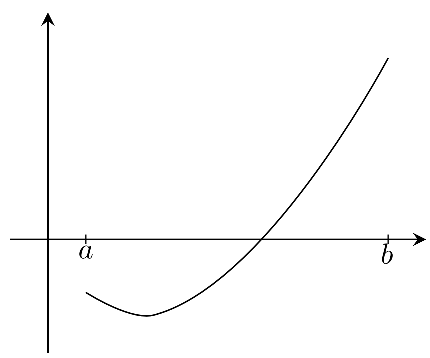
Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 2$.
Prouver que l'équation $f(x) = -1$ a une solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α.

$\star$ ....

$\star$ ....

$\star$ Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ...

Application : algorithme de dichotomie pour la recherche de la solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.
f est une fonction continue sur $[a, b]$, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$ donc il a un antécédent sur $[a, b]$.
En notant c le milieu entre a et b, si $f(c) \times f(a) < 0$ alors le 0 est entre a et c auquel cas on réduit l'intervalle d'étude à $[a, c]$, sinon il est entre c et b et on travaille sur $[c, b]$.



Conséquences :

- Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle (« pas de trous »).
  Autrement dit : si f est une fonction continue, et I un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.
- Par une fonction continue, l'image d'un segment (intervalle fermé) est un segment.
  Ainsi, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Attention : l'image par une fonction continue f du segment $[a, b]$ n'est pas nécessairement $[f(a), f(b)]$!
Exemple : $f(x) = x^2$ sur le segment $[-3, 0]$, l'image est $[0, 9]$ qui correspond à $[f(0), f(-3)]$.

Et si la fonction n'est pas monotone, l'intervalle image pourrait aussi être plus grand que $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$.
Par exemple toujours avec $f(x) = x^2$, $f([-1, 3]) = \dots$

3) retour sur le théorème de la bijection

Rappel : f réalise une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J signifie que tout nombre de J a un unique antécédent par f dans I.

Théorème de la bijection.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$, et $f(I)$ est un intervalle.
f a une réciproque définie sur $f(I)$, continue, et de même sens de variation que f.

Concrètement :

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(b), f(a)]$.
- Dans le cas où l'intervalle est ouvert d'un côté ou des deux, avec éventuellement des bornes infinies, on remplace $f(a)$ (ou $f(b)$) par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$).

Exemples :

- la fonction inverse réalise une bijection de $[2\,; +\infty[$ dans $]0; 0,5]$ car ....
  ....
- la fonction carré réalise une bijection de $]-5; -1]$ dans $[1, 25[$ car ....
  ....
- la fonction carré est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ car ....
  ....
  sa réciproque est ....
- f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 9}$ que l'on étudiera sur $[-6; 0]$: