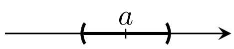
Limites.

I. Limites, définitions et propriétés

1) Voisinages

Vocabulaire :

- Si $I =]2; +\infty[$, 2 et $+\infty$ sont les ***extrémités*** de I ou les ***bords***.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I ou une extrémité de I. On dit que f vérifie une propriété sur un ***voisinage de*** a lorsque cette propriété est vraie sur un intervalle de la forme $I \cap V$ avec :
  - lorsque a est un réel : $V = [a-\delta; a+\delta]$ avec $\delta > 0$ 
  - lorsque $a = -\infty$: $V =]-\infty, C]$ 
  - lorsque $a = +\infty$: $V = [C; +\infty[$ 

Remarque : la notion de voisinage (notamment voisinage de $+\infty$) est à rapprocher de « à partir d'un certain rang » pour les suites.

Exemples :

- La fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 0,1$ est négative au voisinage de $+\infty$.

  En effet, ...

- La fonction ln est positive au voisinage de 2.

  En effet, ...

- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$ est supérieure à 10 au voisinage de $-\infty$.

  En effet, ...

2) Limite finie

Définition.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I.
Et soit ℓ un nombre réel.
On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque pour tout ε strictement positif, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ sur un voisinage de a. Autrement dit :

⋆ si a est un réel : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

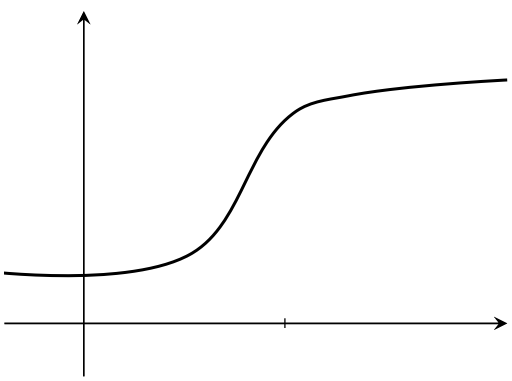
⋆ si a est $-\infty$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant C_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

⋆ si a est $+\infty$: ....

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

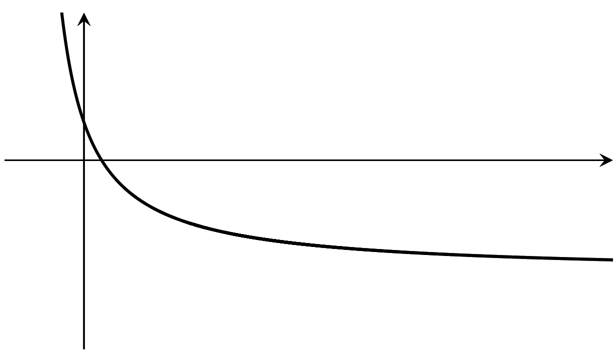
Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$:



Une marge ε étant fixée autour de ℓ, on a pu trouver δ_ε pour que, lorsque x est entre $a - \delta_\varepsilon$ et $a + \delta_\varepsilon$, $f(x)$ soit dans la bande entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ (*pas dans la zone barrée*).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$:



Une marge ε est fixée, on a pu placer un nombre C_ε tel que, lorsque x est supérieur à C_ε, $f(x)$ soit dans la bande entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$.

On observe dans le cas où x tend vers $+\infty$ que la droite horizontale de hauteur ℓ est très proche de la courbe lorsque x est très grand :

Définition.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est dite ***asymptote à la courbe représentative de f en*** $+\infty$.

Exemple de limite finie : soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, montrons que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3) Limite infinie

Définition : la limite est $+\infty$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a lorsque pour tout réel A, $f(x) \geqslant A$ sur un voisinage de a.
Autrement dit :

- ⋆ si a est un réel : ....
- ⋆ si a est $-\infty$: ....
- ⋆ si a est $+\infty$: ....

On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition : la limite est $-\infty$.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a dans I ou un bord de I.

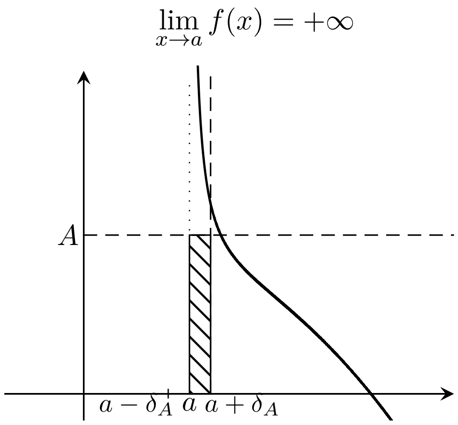
On dit la limite de f en a est $-\infty$ lorsque pour tout réel A, $f(x) \leqslant A$ sur un voisinage de a.

Autrement dit :

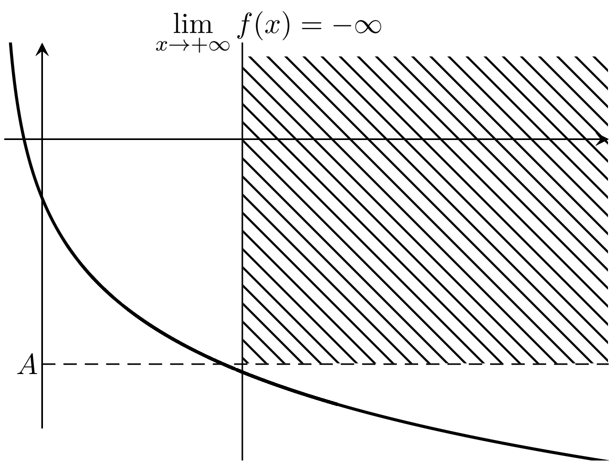
- ⋆ si a est un réel : ....
- ⋆ si a est $-\infty$: ....
- ⋆ si a est $+\infty$: ....

On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$

Interprétation graphique :



Le seuil de hauteur A étant fixé (aussi haut que l'on veut), on a pu trouver un petit intervalle autour de a pour lequel toutes les valeurs de $f(x)$ sont au dessus du seuil.



Le seuil de hauteur A étant fixé, on a pu trouver un réel C_A tel que lorsque x est plus grand que C_A, les valeurs de $f(x)$ sont plus petites que le seuil C.

Définition.

Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, la droite verticale d'équation $x = a$ est dite ***asymptote à la courbe représentative de*** f.

4) Limite à gauche, à droite, continuité

Définition.

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I ou une extrémité de I (mais ni $+\infty$ ni $-\infty$).

- On dit que f admet une ***limite à gauche*** en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty; a[$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x<a}} f(x)$.
- On dit que f admet une ***limite à droite*** en a si ....

  ....

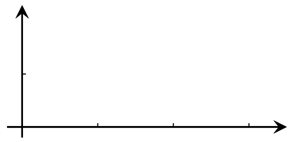
Remarque : Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$. ($b$ étant un nombre fini, ou $+\infty$ ou $-\infty$)

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor =$ ....

....

....



Définition.

Soient a un réel et I un intervalle ouvert contenant a.
f est une fonction définie sur une réunion d'intervalles $I \backslash \{a\}$.
b étant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que f admet pour limite b en a lorsque $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

Propriété et définition.

Soit f définie sur I et $a \in I$.

- si a est la borne supérieure de I (autrement dit $I =]\cdot, a]$ ou $[\cdot, a]$) :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$
- si a est la borne inférieure de I (autrement dit $I = [a, \cdot\,]$ ou $[a, \cdot\,[$) :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$
- si a n'est pas au bord de I : (autrement dit a à l'intérieur de I)
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}.$$

On dit que f ***est continue en*** a si elle admet une limite finie en a,
autrement dit si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Remarque : dans le cas où la fonction est continue, la limite en a est nécessairement $f(a)$.

Exemples :

- La fonction partie entière n'est pas continue en 2 (car ....
- La fonction valeur absolue ...

....

....

....

(*plus de détails sur la continuité dans un prochain chapitre* ***Fonctions 8 - Continuité***)

5) Propriétés des limites

Propriété.

- Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique. (***unicité de la limite***)
- Si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
- Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a et telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$ (propriété dite du « passage à la limite »).

II. Déterminer les limites

1) Opérations

Les règles d'opérations sur les limites ont été déjà vues dans le chapitre Calcul 5 - Limites : *à revoir* !

Rappel des formes indéterminées : ....

Rappel de la règle de l'inverse « avec 0 en bas » :

lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$: $\star$ si $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

$\star$ si $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x+1}$?

Composition de deux fonctions :

Théorème.

$$\begin{array}{rcl} x \longmapsto & u(x) \overset{v}{\longmapsto} & v\big(u(x)\big) \\ & X \longmapsto & v(X) \end{array}$$

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{X\to \ell_1} v(X) = \ell_2 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\big(u(x)\big) = \lim\limits_{X\to \ell_1} v(X) = \ell_2$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2$?

Composition d'une suite par une fonction :

Propriété.

Si (u_n) a pour limite a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.
En particulier si (u_n) converge vers a et que f est continue en a, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Utilisations :

- **cas des suites récurrentes** $u_{n+1} = f(u_n)$ (comme vu dans le chapitre Suites 2) : si (u_n) converge vers a et f continue, on peut montrer que $a = f(a)$ ce qui permet de trouver a.
- **pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite :** par exemple, cosinus n'a pas de limite en $+\infty$
  $\star$ $(2n\pi)$ et $(2n\pi + \pi)$ ont toutes deux pour limite $+\infty$
  $\star$ $\cos(2n\pi)$ a pour limite 1 et $\cos(2n\pi + \pi)$ a pour limite -1.
  (voir un autre exemple d'utilisation dans l'exercice 2.).

2) Limite par comparaison

On rappelle les théorèmes suivants (déjà vus pour les fonctions, et revus adaptés aux suites) :

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes).

f, g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I, avec au voisinage de a : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

On suppose que ...., alors ....

Théorème de limite par comparaison.

f et g sont définies sur un même intervalle I, et au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$:

$\star$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors

$\star$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors

3) Cas d'une fonction monotone

Là encore, une analogie très forte avec le théorème de la limite monotone pour une suite.

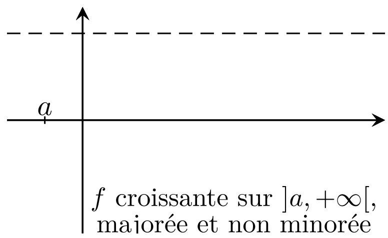
Théorème de la limite monotone.

Soit un intervalle $I =]a, b[$, a et b pouvant être réels ou infinis.

- si f est croissante sur I :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \\ \inf\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est minorée} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \\ \sup\{f(x), x \in I\} & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$$



- si f est décroissante sur I :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

III. Comparaison de fonctions

Il s'agit ici d'étendre aux fonctions les notions de négligeabilité, domination et équivalence, vues sur les suites.

1) relations de comparaison

Définition.

Soient f et g des fonctions définies sur I, soit a dans I ou une extrémité de I.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

- f est ***dominée*** par g au voisinage de a si ....

  On note ....

- f est ***négligeable*** devant g au voisinage de a lorsque ....

  On note ....

- f et g sont ***équivalentes*** au voisinage de a si ....

  On note ....

Pour les fonctions, impérativement préciser $x \to \dots$

$\boxed{\text{Deux fonctions équivalentes au voisinage de } a \text{ ont la même limite en } a.}$

Exemples : • $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$ car • $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ car

2) comparaisons usuelles

puissances, polynômes, fraction rationnelle :

- Pour tous réels α et β $\boxed{\text{avec } \alpha < \beta : x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)}$.
- <u>En ∞ :</u> un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
- <u>En ∞ :</u> une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- <u>En 0 :</u> un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré, et une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus bas degrés.

fonctions usuelles : (avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$)

$$\boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \;;\; \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \;;\; \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \;;\; \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \;;\; \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \;;\; (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

croissances comparées : α, β et γ des réels strictement positifs.

Au voisinage de $+\infty$: $\boxed{(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right) \quad \text{et} \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)}$.

Au voisinage de 0 : $\boxed{(\ln(x))^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}$. (*autrement dit* $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta(\ln(x))^\alpha = 0$)

Au voisinage de $-\infty$: $\boxed{e^{\gamma x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)}$. (*autrement dit* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\gamma x} x^\beta = 0$)

3) équivalences, négligeabilité et opérations

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont définies sur un même intervalle I, et on suppose que a est un nombre de I ou un bord de I.
On suppose également que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a.
Alors

- $\boxed{f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff f \underset{a}{\sim} g}$ ① et $\boxed{g(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x)) \iff f + g \underset{x\to a}{\sim} f}$ ①'
- $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Longrightarrow \forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^*)^2, \alpha f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(\beta g(x)\right)}$ ②
- $\boxed{\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \end{cases} \Longrightarrow f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))}$ ③
- $\boxed{\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \text{et } g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x)) \Longrightarrow f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(f_2(x))}$ ④
- **Produit, quotient :** $\boxed{\begin{cases} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{cases} \Longrightarrow f_1 \times f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \times g_2 \quad \text{et} \quad \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}}$.

  En particulier $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \iff f \times h \underset{a}{\sim} g \times h}$ *en particulier avec une constante :* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \iff \lambda f_1 \underset{a}{\sim} \lambda g_1$

- **Puissance α avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$:** $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha}$.
  (si α non entier, il faut supposer de plus que f est à valeurs positives au voisinage de a)

- **Changement de variable :** ici z est une fonction à valeurs dans I

$$\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} z(x) = a \\ f(y) \underset{y\to a}{\sim} g(y) \end{cases} \Longrightarrow f(z(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} g(z(x))} \quad ⑤$$

Exemple de changement de variable : pour trouver un équivalent de $\sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$.