

ESPACES VECTORIELS.

D - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**

★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F \cup G$.

☞ Exercice 2.

On pose $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.
Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

★ Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et H_1 et H_2 des hyperplans (c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$) que l'on suppose distincts.
Démontrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Exercice 4.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$.
 F et G sont-ils en somme directe ? A-t-on $F + G = \mathbb{R}^3$?
 F et G sont-ils supplémentaires ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $a = (1, 0, 1)$ et $b = (2, 1, 0)$, et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $c = (1, 1, 1)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire inférieure}\}$.
 F et G sont-ils en somme directe ? A-t-on $F + G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
 F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 5.

1. Soit E l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x - y + 2z = 0$.
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
Compléter la base trouvée pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
- ★ 2. Mêmes questions avec l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) tels que $ax + by + cz = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

☞ Exercice 6.

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonction impaires.

On a montré dans le DM n°27 que I est un sous-espace vectoriel de E , on admet qu'il en est de même pour P .

Montrer que P et I sont supplémentaires.

★ Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

On note $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , et en déterminer un supplémentaire.

✎ Exercice 8.

On travaille dans l'espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$, et on note $A = \text{Vect}(X^2 - 1)$ et $B = \text{Vect}(X - 1)$.

Montrer que $E = A \oplus B$.

Exercice 9.

On travaille dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de E , on appelle trace de M et on note $\text{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M . Par exemple, $\text{Tr}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 3 + \sqrt{2}$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.
2. Soit $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base adaptée à la décomposition en somme directe.
3. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 10.

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à la décomposition en somme directe.
2. Déterminer les coordonnées de $X^3 - 4X^2 - 5X + 3$ dans cette base.