

ESPACES VECTORIELS

D - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.

I. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration :

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z = 0\}$

Propriété.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .
Alors $\bigcap_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel de E .

 **Attention :** le plus souvent, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel !

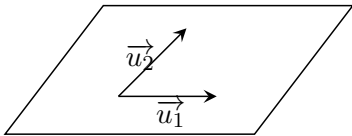
II. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

1) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E .
On note $F + G$ l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
Ainsi, $F + G = \{u + v, \ u \in F \text{ et } v \in G\}$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux droites vectorielles F et G engendrées par des vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.



 **Remarque :** $\text{Vect}(u,v) + \text{Vect}(w,z) = \text{Vect}(u,v,w,z)$

Propriété.

- $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $F + G$ est le plus petit sous-espace de E qui contient $F \cup G$.

Preuve : voir l'exercice 1.

Traduction du second point : si un sous-espace vectoriel de E contient $F \cup G$, alors il contient aussi $F + G$.

2) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.

La somme $F + G$ est dite **directe** lorsque la décomposition $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.

On note alors $F \oplus G$.

Propriété.

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Démonstration :

Précision préliminaire : $F \cap G$ est un espace vectoriel, donc il contient au moins le vecteur nul, ainsi, montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ revient à montrer que $F \cap G \subset \{\mathbf{0}\}$.

Méthode : pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on prend un vecteur dans l'intersection, et on montre que c'est nécessairement le vecteur nul.

Exemple : $F = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$, montrons que F et G sont en somme directe.

3) Somme en dimension finie

Propriété : formule de Grassmann.

Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.
 Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
 En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exemple (suite) : avec F et G de l'exemple précédent, on a déjà montré qu'ils sont en somme directe.

Propriété: base et somme directe.

- Si F et G sont en somme directe, avec $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F , et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G , alors la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$.
- Si $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe : $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
 En particulier, si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors :

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Exemple (suite et fin) : toujours les mêmes F et G .

Donc d'après la propriété, $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $F \oplus G$ (on dit parfois « obtenue par recollement »).

Or on a montré que $F \oplus G$ est égal à $\mathbb{R}^3$.

Donc $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On dit que cette base est *adaptée à la décomposition en somme directe*.

III. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

1) Cas général

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.

Lorsque la somme $F + G$ est directe et que $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont *supplémentaires*.

Exemple 1 : on note $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors d'après le 2ème point de la propriété ci-dessus, $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) \oplus \text{Vect}(\vec{k}) = \mathbb{R}^3$: le plan $(\vec{i}, \vec{j})$ et la droite engendrée par $\vec{k}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, tout vecteur de l'espace peut être décomposé de manière unique en somme d'un vecteur du plan $(\vec{i}, \vec{j})$ avec un vecteur colinéaire à $\vec{k}$.



Exemple 2 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, et soient F le sous-espace vectoriel de E formé des suites convergeant vers 0, et G celui des suites constantes.
On va montrer que F et G sont supplémentaires dans E .



Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :

1. montrer $F \cap G = \{0\}$: on prend un élément de l'intersection et on montre qu'il est nécessairement nul ;
2. montrer $E = F + G$: on prend un élément de E et on cherche à l'exprimer comme une somme d'un élément de F et un élément de G . (on peut alors raisonner par analyse et synthèse)



Attention : ne pas confondre supplémentaire (notion liée aux sous-espaces vectoriels) et complémentaires (notion liée aux ensembles).

2) Supplémentaires en dimension finie

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = F \oplus G$
- (ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
- (iii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
Montrons que F et G sont supplémentaires.

Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie :

- montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul ;
- montrer que la somme de leurs dimensions est la dimension de l'espace.

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F a un supplémentaire G dans E qui vérifie alors $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration : (facultative)

F est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, donc F est de dimension finie.

Donc F a une base, on la note $(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

La famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est donc libre.

Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ telle que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ soit une base de E .

On définit alors le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_q)$.

Alors, d'après la propriété sur les bases et somme directe, F et G sont en somme directe,
et $F \oplus G = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q) = E$.

Donc G est bien un supplémentaire de F .

Et $p + q = \dim(E)$, donc $q = \dim(E) - p$ soit $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

□