

ESPACES VECTORIELS.

B - Familles de vecteurs

🔗 **Exercice basique à savoir refaire** ★ **Exercice non indispensable**

Exercice 1.

Soient $v_1 = (2, 1, 4)$, $v_2 = (1, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 3, 6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.

Que peut-on en déduire pour la famille (v_1, v_2, v_3) ?

🔗 Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. famille (P, Q, R) avec $P = 1 + X^2$, $Q = X^2$ et $R = 2 + 3X$.

2. famille (A, B, C) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ 2 & 14 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? de l'espace vectoriel E .

1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on considère la famille (u, v) où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ et $v_n = n + 1$;

2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille considérée est (f_1, f_2, f_3) où $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{kx}$.

★ Exercice 4.

Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(x)$. Dans le cours nous avons vu que f_1 et f_2 forment une famille libre.

1. On définit pour tout entier naturel p la fonction $g_p : x \mapsto \sin(x + p)$.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $g_p \in \text{Vect}(f_1, f_2)$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{G}_n$ la famille $(g_p)_{p \in [0, n]}$.

Montrer que $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_1$ sont deux familles libres.

Montrer que pour $n \geq 2$, $\mathcal{G}_n$ est liée (on pourra auparavant démontrer que $\text{Vect}(\mathcal{G}_1) = \text{Vect}(f_1, f_2)$).

Exercice 5.

1. (a) Déterminer l'ensemble F des solutions du système $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$.

(b) Justifier que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

2. On considère les deux plans vectoriels P_1 et P_2 d'équations respectives $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$.
Trouver un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrée de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

3. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

🔗 Exercice 6.

Montrer que les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X$ et $P_2 = 1 + X + X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et préciser les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans cette base.

Exercice 7.

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on note $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F .

★ Exercice 8.

Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, -1, i)$, $v_2 = (-1, i, 1)$ et $v_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$ (vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel).

Calculer les coordonnées de $u = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.