Espaces vectoriels
B - Familles de vecteurs

I. Familles génératrices

Définition.

Une famille de vecteurs de E, notés $u_1, u_2, \ldots, u_p$, est dite ***génératrice*** de E si ....

....

Autrement dit, tout vecteur v de E ....

....

Exemples :

- proposer une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en justifiant :

- montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x + 2y - z - 2t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice :

- montrer que la famille $(X + 1, X + 2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$:

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice d'un espace vectoriel E :
  - ⋆ « Soit v dans E, montrons qu'il existe λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée par les vecteurs en colonne : si le rang est n, alors la famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Pour montrer que la famille n'est pas génératrice :
  - ⋆ On trouve un vecteur v qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_p$: « on pose $v = \ldots$, montrons qu'il n'existe pas de λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut aussi déterminer le rang de la matrice formée par les vecteurs en colonne : si le rang n'est pas n, alors la famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Cas particulier : Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice du même espace vectoriel. Par exemple : on a montré que $(X+1, X+2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$, on peut en déduire que $(X, X+1, X+2)$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

II. Familles libres, liées

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est ***libre*** si ....

  ....

  Autrement dit : ....
- Une famille qui n'est pas libre est ***liée***, autrement dit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est liée si ....

  ....

  Autrement dit : ....

Cas particuliers :

- Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ....

  Deux vecteurs forment une famille libre si et seulement si ....
- Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs forment une famille liée signifie ....
- Toute famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés (tous différents) est libre.

  Par exemple : $P_1 = 2 + X$, $P_2 = -5X + 3X^2$ et $P_3 = 1 + 3X + X^3$: ....

  ....
- Une famille contenue dans une famille libre est libre.
  Par exemple : si (u, v, w, x, z) est une famille libre, alors, entre autres, (u, v, x, z) est libre ...
- Une famille contenant une famille liée est liée.
  Par exemple :
- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.

Propriété.

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

Exemples :

- Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, cos et sin forment une famille libre :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....
- Dans $\mathbb{R}_2[X]$, P_1, P_2 et P_3 forment-ils une famille libre ou liée ?
  avec $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = 2X$ et $P_3 = X^2 - 1$?

et avec $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X$ et $P_3 = (X-1)^2$?

- Dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ forment-elles une famille libre ?

  ....

Méthodes :

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre :
  - ⋆ « Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$.
    Montrons qu'alors, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$ »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée par les vecteurs en colonne : si ce rang est p, alors la famille est libre.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée :
  - ⋆ Trouver explicitement des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, dont au moins n'est pas nul, et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$.
    « On pose $\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots, \ldots, \lambda_p = \ldots$: ils ne sont pas tous nuls et $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_E$. (*à justifier*)
    Donc la famille est liée. »
  - ⋆ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, on peut déterminer le rang de la matrice formée par les vecteurs en colonne : si ce rang n'est pas p, alors la famille est liée.

III. Bases

Définition.

Une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Propriété: caractérisation des bases.

Soit $(e_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(e_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ est une base de E ;

(ii) tout vecteur v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

....

Remarque : l'existence de la combinaison linéaire résulte du fait que la famille est génératrice, et l'unicité du fait que la famille est libre.

Vocabulaire et notations : si l'on note $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ une base, alors, dans la décomposition $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ les nombres λ_k sont appelés les ***coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$***, et on les note en général $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$.

Méthodes : pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E :
- ⋆ on peut montrer que c'est une famille libre et génératrice de E ;
- ⋆ on peut montrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille, cela nous donne en même temps les coordonnées.

Exemples à retenir :

- la base ***canonique*** du plan $\mathbb{R}^2$ est $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  exemple avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

- de même, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est formée de $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ ... et $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

- dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la base canonique est formée des $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.
  Pour $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, la base canonique est

  exemple avec $M = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix}$

  les coordonnées de M dans la base canonique sont

- la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est formée des $n+1$ polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

  exemple avec $P = 1 + 3X + 7X^3$ dans $\mathbb{R}_4[X]$:

Méthode

Que faire avec une égalité du type $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$?

- ⋆ dans un espace de type $\mathbb{K}^n$: cette égalité se traduit en un système à n équations (une équation par coordonnée);

- ⋆ dans un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,m}$: même chose, avec $n \times m$ équations (une équation par « position » dans la matrice) ;

- ⋆ dans un espace de fonctions définies sur I, elle se traduit par autant d'équations que de x dans I :
$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \ldots + \lambda_p u_p(x)$$
  pour trouver des relations sur les λ_k, on peut choisir les valeurs de x qui nous arrangent (ou éventuellement dériver les fonctions, regarder leurs limites ...)
  mais attention l'égalité de départ ne sera vraie que si la relation est vraie pour TOUS les x.

- ⋆ dans un espace de suites : idem, une équation par valeur d'indice.

- ⋆ dans un espace de polynômes : on écrit les deux côtés sous forme développée, et on peut identifier les coefficients des X^k, par exemple avec $P = X^3 + 2X^2 - X + 3$, $P_1 = X^2 - 2X - 4$ et $P_2 = 2X^3 - 5X^2 + 1$:
$$P = \lambda P_1 + \mu P_2 \Longleftrightarrow X^3 + 2X^2 - X + 3 = 2\mu X^3 + (\lambda - 5\mu)X^2 - 2\lambda X + (-4\lambda + \mu) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\mu \\ 2 = \lambda - 5\mu \\ -1 = -2\lambda \\ 3 = -4\lambda + \mu \end{cases}$$
  OU on peut aussi faire comme avec les fonctions et prendre des valeurs !