Variables aléatoires sur un univers fini.

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7, et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire successivement et sans remise, deux jetons de ce sac.
On note N_k (respectivement B_k) l'événement « au tirage k sort un jeton noir (respectivement blanc) ».

1. **(a)** On note A l'événement « les deux jetons sont blancs ».
Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{7}{15}$.

(b) On note B l'événement « les deux jetons piochés sont impairs ».
Quelle est la probabilité de B ?

(c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. X est la variable aléatoire du nombre de jetons blancs piochés au cours de ces deux tirages.
Déterminer la loi de X.

x_k	$\ldots$
$\mathbf{P}(X = x_k)$	

Exercice 2.

Une boîte contient 6 boules indiscernables au toucher. Il y a 3 boules rouges, 2 boules vertes, et 1 boule blanche. On pioche au hasard successivement et sans remise deux boules dans la boîte.

1. Construire l'arbre représentant cette expérience.

2. Une boule rouge rapporte 1 euro, une boule verte 5 euros, et une boule blanche 10 euros.
On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le gain issu des deux boules tirées. Déterminer la loi de Y.

y_k	$\ldots$
$\mathbf{P}(Y = y_k)$	

3. Quelle est la probabilité qu'on gagne au moins 12 euros ?
et 10 euros ou moins de 10 euros ?
Quelle est la probabilité que l'on gagne moins de 14 euros sachant que l'on a gagné plus de 8 euros ?

Exercice 3.

On dispose d'un espace probabilisé avec $\Omega = \{a; b; c; d; e; f\}$. On considère la variable aléatoire T définie sur l'univers Ω par $T(a) = T(e) = 2$; $T(b) = 0$; $T(c) = -3$; $T(d) = -2$ et $T(f) = 1$.

1. Expliciter les issues composant chacun des événements suivants :
$(T = 2)$; $(T = -3)$; $(T = -1)$; $(T \leqslant 0)$; $(T \geqslant 3)$; $(T < 1) \cup (T \geqslant 2)$.

2. En supposant que la probabilité $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω, déterminer la loi de probabilité de T.

t_k	$\ldots$
$\mathbf{P}(T = t_k)$	

☞ Exercice 4.

Calculer l'espérance des variables aléatoires X et Y étudiées dans les exercices précédents, puis l'espérance et la variance de T.

☞ Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_k	-2	0	2	5
$\mathbf{P}(X = x_k)$	0,15	0,23	0,45	0,17

1. Si $g(x) = -2x + 3$, déterminer la loi de $Y = g(X)$, puis donner (au moins) deux calculs qui permettent d'obtenir son espérance.

2. Si $h : x \mapsto x^2$, déterminer la loi de $Z = h(X)$, puis donner deux calculs qui permettent d'obtenir son espérance.

★ Exercise 6.

We have 20 balls in a bowl numbered from 1 to 20. We pull out three balls, one by one, without replacement. X represents the largest of the three numbers.

1. Find $X(\Omega)$, and for each k in $X(\Omega)$, write down the expression of $\mathbf{P}(X \leqslant k)$.

2. Use the previous result to write $\mathbf{P}(X \leqslant k-1)$ and finally $\mathbf{P}(X = k)$.

Exercice 7.

Un fabricant de téléviseurs plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication. Si ce premier test est positif (c'est-à-dire l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon, l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude a permis de montrer que 70% des écrans neufs fonctionnent directement en sortie de chaîne de fabrication. Parmi les écrans qui n'ont pas passé le premier test et ont été réparé, seulement 60% passent le second test avec succès.
On note T_1 l'événement « le premier test est positif », et C : « l'écran est acheminé vers le client ».

1. En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(T_1, \overline{T_1})$, déterminer la probabilité de l'événement C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 euros au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Dans le cas où il doit être réparé et testé une seconde fois, il faut rajouter 100 euros.
Le fabricant facture l'écran a euros au client.
On appelle X la variable aléatoire qui à un écran associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

- **(a)** Déterminer en fonction de a, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, puis les probabilités de chacune des valeurs.
- **(b)** Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
- **(c)** À partir de quel prix de vente, l'entreprise peut-elle espérer des bénéfices ?