Étude de fonctions

☞ Exercice 1.

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau des variations pour x positif est donné ci-contre.
On précise que $f(7) = 0$.

x	0		2		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1. On suppose que f est paire, déterminer son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ et résoudre $f(x) \leqslant 0$.

2. Mêmes questions si f est impaire.

Exercice 2.

Après avoir précisé l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudier leur parité.

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ $\qquad g(x) = x^3 - 3x - \frac{2}{x}$ $\qquad h(x) = 5(x-3)^2$ $\qquad k(x) = \dfrac{-3x^2+1}{\sqrt{x^4+2}}$

Exercise 3.

Let f and g be defined on $\mathbb{R}$. We assume that f is even and g is odd.
We admit that the domain of the following functions is $\mathbb{R}$, find out whether they are even or odd.

$h_1 : x \mapsto f(x)g(x)$ $\qquad h_2 : x \mapsto f \circ g(x)$ $\qquad h_3 : x \mapsto f(x)g(x)x^3$ $\qquad h_4 : x \mapsto |g(x)|$

☞ Exercice 4.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente (*on rappelle que* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$), puis étudier la parité, imparité et périodicité.
En déduire le plus petit domaine d'étude possible puis les transformations nécessaires pour reconstituer toute la courbe.

★ Exercice 5.

Étudier la périodicité de $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ et de $g : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ puis de $f+g$.

Exercice 6.

Soit $f(x) = \ln(1+\cos(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus petit possible.

3. Déterminer la limite de f en π.

4. Étudier les variations de f et préciser ses extrema éventuels.

5. Justifier que f réalise une bijection de $[0, \pi[$ dans un intervalle à préciser.

6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0, et en $\frac{\pi}{2}$.

7. Tracer l'allure du graphique de f. (*on précise que* $\ln(2) \approx 0,7$)

Exercice 7.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser.
Déterminer sa réciproque, préciser son sens de variation.

2. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 3$? et l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$?

★ Exercice 8.

Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto x^3 + \alpha x + 1$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?