Probabilités conditionnelles et indépendance.

Thomas Bayes (1702-1761) était ministre du culte presbytérien dans le Kent en Angleterre. Il est devenu célèbre suite à la publication posthume d'un article An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.

Cet article, en particulier la formule de Bayes qu'il expose, sont à la base de l'inférence bayésienne : on calcule la probabilité d'une cause hypothétique à partir de l'observation d'événements connus. Cette probabilité s'interprète comme le degré de confiance à accorder à cette cause hypothétique. L'interprétation des tests médicaux est une application de l'inférence bayésienne.

I. Probabilités conditionnelles

La ***probabilité conditionnelle de*** B ***sachant*** A, notée $\mathbf{P}_A(B)$, représente la probabilité de l'événement B dans la situation où l'on sait que l'événement A a été réalisé.
Il s'agit donc d'une probabilité, mais pour laquelle l'univers n'est pas Ω, mais A, ainsi par exemple $P_A(A) = 1$.

Définition: axiome des probabilités conditionnelles.

Soit A un événement de l'univers Ω de probabilité non nulle.
Soit B un événement, la ***probabilité conditionnelle de*** B ***sachant*** A est notée $P_A(B)$ et est définie par $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.
$P_A(B)$ se dit aussi « probabilité de B sachant A » et se note aussi $\mathbf{P}(B|A)$.

Remarque : $\mathbf{P}_A$ est une probabilité sur l'univers A, ainsi entre autres $\boxed{\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A(\overline{B}) = 1}$.

Exercice : On lance deux fois un dé tétraédrique équilibré : $\Omega =$ . . . . ; $\text{Card}(\Omega) =$ . . . .

Déterminer

- la probabilité que la somme des deux dés soit de 6 (on notera S cet événement) :

- la probabilité que la somme des deux dés soit de 6 sachant que l'on a obtenu 2 au premier dé (noté D) :

- la probabilité que la somme des deux dés soit de 7 (noté T) sachant que l'on a obtenu 2 au premier dé :

Cas de l'équiprobabilité : Ω est un univers, et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur cet univers.
Si A est un événement non impossible et B est un autre événement, $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.
On voit bien que la probabilité uniforme conditionnelle à A est la probabilité uniforme « normale » avec pour référence, l'événement A.

1) Probabilités composées

Cette formule s'utilise chaque fois que l'on peut décomposer l'expérience aléatoire en plusieurs étapes successives.
La probabilité d'un événement exprimé comme une intersection est le produit des probabilités portées par les branches qui mènent à cet événement.

Formules des probabilités composées :

• A et B sont deux événements d'un univers Ω avec $\mathbf{P}(A) \neq 0$.
Alors $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)}$.

• A_1, A_2 et A_3 sont trois événements d'un univers Ω $\big($tels que $\mathbf{P}(A_1) \neq 0$ et $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \neq 0\big)$.
Alors $\boxed{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)}$.

• $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont n événements d'un univers Ω $\big($tels que $\mathbf{P}(A_1) \neq 0$ et $\ldots \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0\big)$.
Alors

Exemple : On considère un groupe d'adultes formé de 60% d'hommes.
On sait que 10% des hommes et 20% des femmes savent parler anglais.
On tire au sort un individu de ce groupe.
On note H l'événement « avoir choisi un homme » et A l'événement « avoir choisi un individu qui sait parler anglais ».

1. Traduction des données de l'énoncé en terme de probabilités :

2. Traduire les événements suivants en fonction de A et H, puis calculer leurs probabilités :

- « l'individu est un homme parlant anglais » :

- « l'individu est un homme ne parlant pas anglais » :

- « l'individu est une femme parlant anglais » :

- « l'individu est une femme ne parlant pas anglais » :

2) Probabilités totales

Cette formule s'utilise lorsque l'on veut distinguer plusieurs cas.

Système complet d'événements :

Définition.
Soient Ω un univers, et $C_1, C_2, \ldots, C_p$ des événements.
On dit que ces événements forment un ***système complet d'événements*** si ils vérifient les deux conditions suivantes :
$\star$ ils sont deux à deux incompatibles : pour tous i et j de $[\![1;p]\!]$ avec $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \emptyset$;
$\star$ leur réunion est l'événement certain : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} C_i = \Omega$.
Autrement dit : toute issue de Ω est dans un et un seul de ces événements.

D'un point de vue des ensembles, on dit que $(C_i)_{i=1\ldots p}$ forme une partition de Ω.

Exemples :

⋆ si A est un événement de Ω différent de l'événement impossible et de l'événement certain, alors $(A;\overline{A})$ forme un système complet d'événements de Ω.

⋆ lorsqu'on lance deux dés, un système complet d'événements est formé par les 3 événements suivants :

– « les deux dés donnent un nombre pair »

– « . . .

– « . . .

Formules des probabilités totales :

La probabilité d'un événement est le total des probabilités de cet événement dans les différents cas.

• A et B sont deux événements d'un univers Ω $\big($avec $0 < \mathbf{P}(A) < 1\big)$.

Alors $\boxed{\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A\cap B) + \mathbf{P}(\overline{A}\cap B)\\ &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}_{\bar{A}}(B)\end{aligned}}$.

• C_1, C_2 et C_3 forment un système complet d'événements d'un univers Ω, de probabilités non nulles, et B est un autre événement de Ω.

Alors $\boxed{\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(C_1\cap B) + \mathbf{P}(C_2\cap B) + \mathbf{P}(C_3\cap B)\\ &= \mathbf{P}(C_1)\mathbf{P}_{C_1}(B) + \mathbf{P}(C_2)\mathbf{P}_{C_2}(B) + \mathbf{P}(C_3)\mathbf{P}_{C_3}(B)\end{aligned}}$.

• $(C_k)_{k=1..n}$ est un système complet d'événements de Ω, de probabilités non nulles, et B est un autre événement de Ω.

Alors $\boxed{\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \qquad\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(C_k\cap B)\\ &= \qquad\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(C_k)\mathbf{P}_{C_k}(B)\end{aligned}}$.

Exemple : on dispose de 4 dés un peu particuliers : l'un n'a que des faces « 6 », l'un a deux faces « 6 » et quatre faces « 5 », et les deux autres sont normaux.
On choisit un dé au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
On notera A l'événement « choisir le premier dé », B « choisir le deuxième dé », N « choisir l'un des deux dés normaux » et S « obtenir 6 ».

3) Formule de Bayes (probabilité des causes)

Ces formules s'utilisent lorsque l'on veut « remonter le temps » : si deux événements A et B sont les résultats d'expériences successives, et que A s'est (ou pas) produit avant B, connaître la probabilité de B sachant A est naturel.
Mais ici, on sait que B s'est réalisé, et on cherche à mesurer l'influence que A a eue dans la réalisation de B, savoir si A est une cause probable de B : cela revient à calculer la probabilité de A sachant B.

Formule de Bayes :

A et B deux événements d'un univers Ω de probabilités non nulles.
Alors $\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)}{\mathbf{P}(B)}}$.

Remarques :
- ⋆ Souvent pour calculer $P(B)$ on utilise la formule des probabilités totales (avec A et $\overline{A}$).
- ⋆ On utilise généralement ces formules lorsqu'on nous demande de calculer $\mathbf{P}_B(A)$ alors qu'il nous aurait semblé plus naturel de calculer $\mathbf{P}_A(B)$.

Exemple : on reprend les dés truqués de l'exemple précédent. On sait que l'on a obtenu un 6, quelle est la probabilité que le dé pioché ait été le premier (celui qui n'a que des 6) ?

II. Indépendance d'événements

1) Indépendance de deux événements

Définition.
Les deux événements A et B sont dits ***indépendants*** lorsque $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Conséquences : Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)}$.
En effet,

Remarque : deux événements incompatibles ne sont pas indépendants (sauf si la probabilité de l'un des deux est 0).

Exemple : dans un jeu de 32 cartes, on pioche une carte au hasard.
On note A l'événement « la carte est un as », et B : « la carte est un trèfle ». Montrons que A et B sont indépendants.

Utilisations de l'indépendance :

- ⋆ L'indépendance de deux événements peut se justifier par les modalités de l'expérience : par exemple dans l'expérience qui consiste à lancer 2 fois successivement un dé, le résultat au premier jet n'influence pas le 2ième, donc tous les événements concernant uniquement le résultat du premier jet seront indépendants des événements concernant uniquement le résultat du second jet, et la formule de l'indépendance nous permet de calculer des probabilités.
- ⋆ Pour prouver par le calcul l'indépendance de deux événements A et B (lorsqu'elle ne peut être déduite des conditions de l'expérience), il faut calculer explicitement $\mathbf{P}_A(B)$ et $\mathbf{P}(B)$ et vérifier que les deux résultats sont égaux (ou $\mathbf{P}_B(A)$ et $\mathbf{P}(A)$, ou $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$).

2) Indépendance de plusieurs événements, ou indépendance *mutuelle*

Trois événements A_1, A_2 et A_3 sont ***mutuellement indépendants*** si :
$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)$ et $\mathbf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_3)$ et $\mathbf{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$
ET $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$

De manière plus générale :

Définition.

Dans un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbf{P})$, on dit que les n événements A_1, A_2, $\ldots A_n$ sont ***mutuellement indépendants*** (ou indépendants) si pour tout k de $[\![1; n]\!]$, quels que soient les k événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k}$ que l'on prend parmi A_1, A_2, $\ldots A_n$, on a :

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Remarque : Si les n événements A_1, A_2, $\ldots A_n$ sont mutuellement indépendants, alors on peut échanger chacun des A_i avec son complémentaire $\bar{A}_i$, les n événements seront toujours mutuellement indépendants.

Exemple : On lance 10 fois un dé équilibré.
Calculer la probabilité qu'aucun 6 n'apparaisse.