Applications

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, écrire en français la lecture de la proposition, puis tracer le graphique d'une (ou plusieurs) fonction(s) définie(s) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la propriété.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

4. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$.

Exercice 2.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis écrire leurs négations.

1. f est à valeurs positives. **2.** f s'annule. **3.** f est constante.

☞ Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer : $f([-1,4])$, $f^{-1}([-1,4])$, $f(]-\infty,3])$, $f^{-1}(f([0,3]))$ et $f(f^{-1}([-3,2]))$.

★ Exercise 4.

Let E and F be two sets, and f a mapping from the set E to the set F.
A and B are two subsets of E.

1. Prove that if $A \subset B$, then $f(A) \subset f(B)$.

2. Prove that $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. Prove that $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

☞ Exercice 5.

1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$.
Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.

2. Soit g application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
g est-elle injective ? surjective ?

3. Pour un entier n quelconque, déterminer $g \circ f(n)$ et $f \circ g(n)$.
(*on pourra commencer par des exemples*).

Exercice 6.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,x') & \mapsto & (x+x', xx') \end{array}$ $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x-a| \end{array}$ où a est un réel fixé

Exercice 7.

Montrer que les applications suivantes sont des bijections, et déterminer leurs applications réciproques.

$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$ $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-7 \end{array}$