Applications.

Préliminaire : pour écrire une proposition mathématique contenant une variable, on utilise des ***quantificateurs*** : le quantificateur universel « pour tout » ou « quel que soit » et le quantificateur existentiel « il existe », qui permettent de distinguer si l'énoncé est valable pour toutes les valeurs possibles de la variable, ou pour une (au moins).
Ils sont symbolisés par les écritures $\forall$ pour le quantificateur universel, et $\exists$ pour le quantificateur existentiel (lorsque l'on emploie ce dernier, la virgule qui suit se lit « tel que »: "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 7$ " se lit « il existe x dans $\mathbb{R}$ tel que x^2 soit égal à 7 »).

Par exemple, la proposition : "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$" est vraie, mais "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 \geqslant 0$" est fausse.
En revanche, "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 \geqslant 0$" est vraie.
Ces deux notations ont des significations bien précises, et ne peuvent être employées que dans une proposition en écriture symbolique, lorsque l'on peut les remplacer par les mots « pour tout » ou « il existe » et obtenir une phrase grammaticalement correcte et ayant du sens.

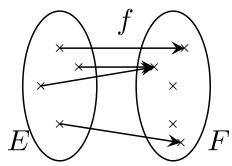
I. Définition et exemples d'applications

Une application met en relation deux ensembles.

Définition.

Soient E et F deux ensembles.
On appelle application de E dans F la donnée, pour tout x de E, d'un unique élément y de F, appelé image de x.
E est appelé ***ensemble de départ*** et F est l'***ensemble d'arrivée***.
Si on note f l'application, y est l'***image*** de x et est notée $f(x)$.
Et x est un ***antécédent*** de y.
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

On note
$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

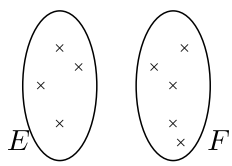


Exemples :

- La fonction inverse est ....
- Soit T_1 l'ensemble des étudiants de TSI2.1, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des lettres de l'alphabet.
  On appelle p l'application qui à un étudiant de TSI2.1, associe la première lettre de son prénom : p est une application de T_1 dans $\mathcal{A}$.
  On a par exemple $p(\ldots$.
- La suite $u : n \mapsto 2^n + 1$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: à chaque entier naturel n, elle associe l'entier naturel $2^n + 1$.
  L'image de 4 par cette application est ...
  Un antécédent de 9 par cette application est ... car ...
- La valeur absolue $|\cdot| : x \mapsto |x|$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Remarques :

- Associer à une valeur de cosinus, un angle correspondant n'est pas une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ car pour chaque cosinus, il existe plusieurs angles (en fait une infinité) : ....
- De même, ci-contre, une « association » entre éléments des ensembles E et F qui n'est pas une application. En effet, ...
  ....



Définition.

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
On appelle ***graphe*** de f l'ensemble des couples (x, y) où $f(x) = y$.
En notant G le graphe, $G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ (ou $G = \{(x, f(x)), x \in E\}$).
« G est l'ensemble des couples x, y où x décrit E et y égale $f(x)$ »

Exemples :

- pour l'application p, ...
- $f : x \mapsto x^2$, le graphe est en fait ....

Définition.
E et F sont deux ensembles, A une partie de E et f une application de E dans F. On appelle ***restriction*** de f à A et on note $f|_A$ l'application de A dans F définie par $f|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Définition.
On appelle ***application identité de*** E que l'on note Id_E l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$

II. Image directe, image réciproque

Définition.
Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, A une partie de E.
On appelle ***image directe*** de A par f et on note $f(A)$, l'ensemble des images par f des éléments de A :
$\boxed{f(A) = \{f(x),\ x \in A\}}$. « $f(A)$ est égal à l'ensemble des $f(x)$ lorsque x décrit A »

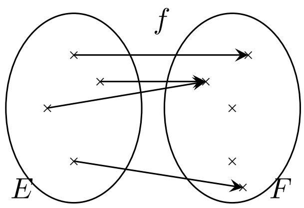
Remarque : on peut aussi noter $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.
« ...

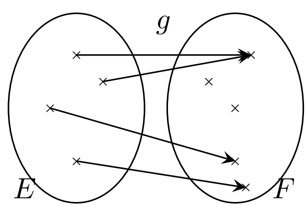
Exemple : toujours avec l'application p qui à un étudiant de TSI2.1 associe la première lettre de son prénom, on note F l'ensemble des filles de la classe.

$p(F) = \dots$

Définition.
Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, B une partie de F.
On appelle ***image réciproque*** de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de B : $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$.
« $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des x de E tels que $f(x)$ appartienne à B »

Exemples :
- avec la même application p, $p^{-1}(\{A; B; C\}) = \dots$
-





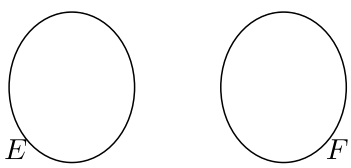
Remarque : en pratique, on utilise souvent $\boxed{x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B}$.

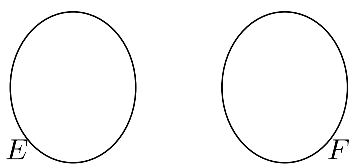
III. Injection, surjection, bijection

1) Injection

Définition.
Soit f une application de E dans F.
On dit que f ***est injective*** (ou f ***est une injection***) si tout élément de F admet au maximum un antécédent par f dans E.
Autrement dit, $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$
« pour tous x et x' dans E, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$ »

Exemples : application injective application non injective





Méthodes :

⋆ Pour montrer qu'une application f est injective :
« Soient x et x' dans E, on suppose que $f(x) = f(x')$. Montrons qu'alors, $x = x'$. »

⋆ Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver un contre exemple, c'est-à-dire deux éléments de E qui ont la même image.

Exemples :

- L'application p est-elle injective ?

  ....

- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est-elle injective ?

  ....

  On note $f_2 = f|_{\mathbb{R}^+}$, f_2 est-elle injective ? ...

  ....

  ....

  ....

  ....

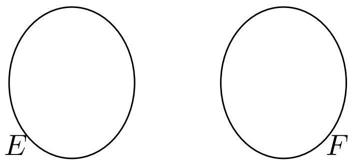
2) Surjection

Définition.

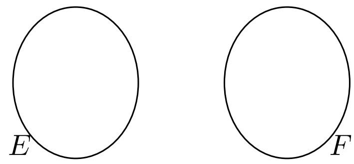
Soit f une application de E dans F.
On dit que f ***est surjective*** (ou f ***est une surjection***) lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E.
Autrement dit, $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
« pour tout y de F, il existe x dans E tel que $f(x) = y$ »

Exemples :

application surjective



application non surjective



Méthodes :

⋆ Pour montrer qu'une application est surjective, on prend un y quelconque dans F, et on trouve un x dans E tel que $f(x) = y$.

⋆ Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit de trouver un contre exemple, c'est-à-dire un élément de F qui n'admet aucun antécédent.

Exemples :

- L'application p est-elle surjective ?

  ....

- La fonction $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est-elle surjective ?

  ....

  Et $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$?

  ....

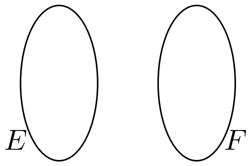
  ....

3) Bijection

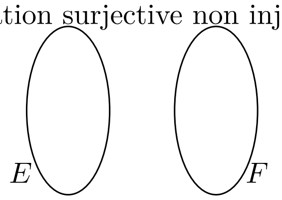
Définition.

Soit f une application de E dans F.
On dit que f ***est bijective*** (ou f ***est une bijection***) lorsqu'elle est injective et surjective : tout élément de F a un et un seul antécédent par f dans E.
Autrement dit, $\forall y \in F,\ \exists! x \in E, f(x) = y$.
« pour tout y de F, il existe un unique x de E tel que $f(x) = y$ »

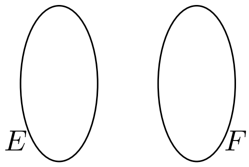
Exemples : application ni injective ni surjective :



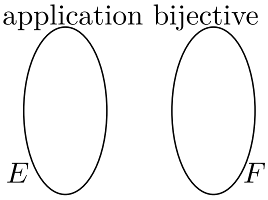
application surjective non injective :



application injective non surjective :



application bijective :



Méthode : pour montrer qu'une application est bijective, on peut au choix :

- ⋆ montrer qu'elle est injective et surjective ;
- ⋆ prendre y dans F et résoudre l'équation $f(x) = y$ pour montrer qu'elle a une solution unique.

Exemples :

- l'application p ....
- les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ sont-elles bijectives ?

....

....

- La fonction $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$ est-elle une bijection ?

Définition.

Soit f une bijection de E dans F.
On appelle ***application réciproque de*** f et on note f^{-1}, l'application de F dans E qui à y associe son unique antécédent par f.
Ainsi, $f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \to & E \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$

Exemple : la réciproque de la fonction f_4 ci-dessus est ...
la réciproque de la fonction f_5 est :

Propriété.

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque, alors $f^{-1} \circ f = \dots$ et $f \circ f^{-1} = \dots$.

Attention : la même notation est utilisée pour l'image réciproque et pour la fonction réciproque. L'image réciproque d'un ensemble existe toujours, mais la fonction réciproque n'existe que dans le cas d'une bijection. Toutefois, lorsque les deux existent, la notation correspond : l'image réciproque d'un ensemble par f est l'image de cet ensemble par l'application réciproque.