Systèmes linéaires.

Dans le recueil de problèmes « Neufs Chapitres sur l'Art du Calcul », publié en Chine vers 150 avant JC, on trouve une méthode de résolution de systèmes linéaires (*Chapitre 8 : Disposition rectangulaire pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif.*). Cette méthode est désormais connue sous le nom de « pivot de Gauss-Jordan » en l'honneur du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), qui posa le principe général de la méthode, et de Wilhelm Jordan (1842-1899) qui en précisa les notations.

Surnommé *Prince des mathématiciens* Gauss a permis de grandes avancées en mathématiques, et aussi en astronomie et en physique.

Jordan était un géomètre allemand, spécialisé dans l'étude des cartes (géodésie).

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités sur les systèmes linéaires

Une ***équation linéaire*** d'inconnues réelles $x_1, x_2, \ldots x_p$, est une relation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = b$ où les a_k et b sont dans $\mathbb{K}$.

1) Qu'est-ce qu'un système linéaire ?

Définition.

Un ***système linéaire de n équations à p inconnues*** est un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + & \ldots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + & \ldots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + & \ldots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est appelé ***second membre*** du système.
On appelle ***système homogène associé*** le système où le second membre est $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemples :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -15 \\ -2x - 2y + 4z = 16 \\ 3x - y - 5z = -2 \end{array}\right.$$ ....

$$(S_2)\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{r} x + 2y^2 - 3z = -15 \\ -2x + \ln(y) + 4z = 16 \\ 3xy - z = -2 \end{array}\right.$$ ....

Définition.

Un système qui a au moins une solution est dit ***compatible***.
Un système qui n'a pas de solutions est ***incompatible*** ($\mathcal{S} = \emptyset$).

2) Systèmes équivalents

Définition.

On peut effectuer sur les lignes d'un système les trois ***opérations élémentaires*** suivantes :

- échanger 2 lignes : si l'on échange la ligne 1 et la ligne 3, on note $L_1 \leftrightarrow L_3$
- multiplier une ligne par un nombre non nul : si on veut multiplier la ligne i par 3 on note $L_i \leftarrow 3L_i$ « on remplace L_i par 3 fois L_i » (on peut aussi diviser par un nombre non nul)
- ajouter (ou soustraire) λL_j à la ligne L_i (pour $i \neq j$) : on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Deux systèmes linéaires sont dits ***équivalents*** si on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'opérations élémentaires.

Exemple : $(S_1)\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=-15 \\ -2x-2y+4z=16 \\ 3x-y-5z=-2 \end{array}\right.$

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2\,y & -3\,z & = & -15 & \\ & & & & = & & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ & & & & = & & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array}\right.$$

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2\,y & -3\,z & = & -15 & \\ & & & & = & & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ & & & & = & & \end{array}\right.$$

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2\,y & -3\,z & = & -15 & \\ & & & & = & & \\ & & & & = & & L_3 \leftarrow L_3+7L_2 \end{array}\right.$$

Propriété.

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Suite de l'exemple : déduire de la propriété la solution de (S_1) :

3) Notation matricielle d'un système

Dans l'exemple précédent, on aurait pu s'abstenir de l'écriture des inconnues, à condition de garder les coefficients dans l'ordre et alignés. On peut donc utiliser la notation ***matricielle*** du système, qui consiste en le tableau des coefficients.

Définition.

Soit le système suivant

$$(S) : \left\{\begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+ & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+ & \dots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+ & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- On appelle ***matrice du système*** (S) le tableau $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.
- Soit $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la colonne des seconds membres, on appelle ***matrice augmentée*** du système (S) la matrice $\big(A|B\big)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$.

Exemple : la matrice augmentée du système (S_1) est

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (éventuellement augmentée) sont les mêmes que sur un système.

Définition.

Deux matrices A et A' sont dites ***équivalentes en lignes*** si elles se déduisent l'une de l'autre par une succession finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Par construction, si (S) et (S') sont deux systèmes équivalents en ligne, les matrices augmentées de (S) et de (S') sont aussi équivalentes en lignes, et la succession d'opérations élémentaires est la même pour les systèmes et les matrices.
Pour la suite, nous travaillerons donc indifféremment sur des systèmes, ou les matrices augmentées associées.

Attention : les notations ne sont pas les mêmes ! $(S) \Longleftrightarrow (S')$ mais $(A|B) \underset{L}{\sim} (A'|B')$.

II. Résolution d'un système linéaire

1) Échelonnement, système triangulaire

Définitions.

- Une matrice est dite ***échelonnée en lignes*** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  - **(i)** si une ligne est entièrement nulle, alors toutes les lignes d'en dessous le sont aussi ;
  - **(ii)** à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
- Dans une matrice échelonnée en lignes, on appelle ***pivot*** le premier coefficient non nul de chaque ligne (lorsqu'il y en a un). Le ***rang*** de la matrice est le nombre de pivots.
- Une matrice échelonnée en lignes est dite ***échelonnée réduite en lignes*** lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemples : pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est échelonnée en ligne ou pas, si elle l'est entourer les pivots, et préciser si elle est réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

....

....

Remarque : on parle aussi de système échelonné (ou triangulaire) ou échelonné réduit, et de ***rang*** de système.

Exemples : résoudre les systèmes ayant pour matrices augmentées les matrices suivantes :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2) Algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Nous avons vu qu'un système échelonné était très simple à résoudre, donc pour résoudre un système, il « suffit » de trouver un système échelonné équivalent au système de départ, c'est-à-dire transformer petit à petit le système par des opérations élémentaires pour le rendre échelonné.
Et ceci est toujours possible :

Propriété.

- ⋆ Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.
- ⋆ Tout système non nul est équivalent à un unique système échelonné réduit.

L'algorithme est une méthode systématique qui permet d'arriver à un système échelonné.

Voici les principales étapes avec 3 équations à 3 inconnues dans un cas « idéal »:

système de départ : $\left\{\begin{array}{l} \cdot x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot x + \cdot y + \cdot z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

$\vdots$ $\left\{\begin{array}{l} 1x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot x + \cdot y + \cdot z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

étape intermédiaire : $\left\{\begin{array}{r} 1x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot y + \cdot z = \cdot \\ \cdot y + \cdot z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

$\vdots$ $\left\{\begin{array}{r} 1x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ 1y + \cdot z = \cdot \\ \cdot y + \cdot z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

système échelonné :
(matrice échelonnée en lignes) $\left\{\begin{array}{r} 1x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ 1y + \cdot z = \cdot \\ \cdot z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

$\vdots$ $\left\{\begin{array}{r} 1x + \cdot y + \cdot z = \cdot \\ 1y + \cdot z = \cdot \\ 1z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \end{array}\right)$

$\vdots$ $\left\{\begin{array}{r} 1x + \cdot y \quad = \cdot \\ 1y \quad = \cdot \\ 1z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \end{array}\right)$

système échelonné réduit :
(matrice échelonnée réduite) $\left\{\begin{array}{r} 1x \quad = \cdot \\ 1y \quad = \cdot \\ 1z = \cdot \end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \end{array}\right)$

Quelques remarques :

- Certains $\cdot$ peuvent être égaux à 0.
  Si il y a un 0 alors que l'on veut mettre un 1, on échange avec l'une des lignes suivantes.
- Pour pouvoir se relire et pour ne pas perdre le correcteur, il faut absolument coder chacune des étapes que l'on fait avec les notations vues plus haut.
- Les étapes présentées ici fonctionnent toujours. Mais il se peut qu'il y ait des étapes plus rapides : si l'on est suffisamment à l'aise avec la méthode et que l'on voit un raccourci, on peut l'utiliser, à condition que cela fasse vraiment gagner au moins une étape !
- On peut s'arrêter au système échelonné et en déduire z, puis y puis x en remplaçant dans les équations.

Attention : le schéma ci-dessus est « idéal ». En pratique, le système peut ne pas être carré, il peut y avoir moins de pivots que de lignes ... l'algorithme aboutit dans tous les cas sur une matrice échelonnée réduite en lignes !

3) Solutions d'un système linéaire

Interprétation géométrique : résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x-6y &=& 2 \\ -1{,}5x+9y &=& -3 \end{array}\right.$ revient à chercher l'intersection des droites d'équations $x-6y-2=0$ et $-1{,}5x+9y-3=0$.

Dans le plan, deux droites peuvent être ....

Et si on résout $\left\{\begin{array}{rcl} x-6y &=& 2 \\ -1{,}5x+9y &=& 1 \end{array}\right.$

Et $\left\{\begin{array}{rcl} x-6y &=& 2 \\ -2x+3y &=& 1 \end{array}\right.$

Définition.

Les ***inconnues principales*** sont celles qui correspondent aux pivots, et les ***inconnues secondaires*** sont les autres, et elles servent de paramètre.

Théorème.

On note $(A|B)$ la matrice augmentée du système de départ, et $(A'|B')$, une matrice équivalente en lignes à $(A|B)$ avec A' échelonnée et réduite :

- Un système est compatible si et seulement si toutes les lignes nulles de A' correspondent à un coefficient nul de B'.
- Si un système est compatible :
  - ⋆ si le rang est égal au nombre d'inconnues, il y a une unique solution ;
  - ⋆ si le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues, il y a une infinité de solutions : la réponse sera présentée sous forme de relations où les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires qui serviront de paramètres.

Remarque : pour présenter la solution, le choix des inconnues principales et secondaires n'est pas unique ! mais le nombre de chaque catégorie ne changera pas, quelle que soit la résolution choisie.

Exemples : résoudre le système (S_1) correspondant à la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & -2 & 5 \end{array}\right)$

puis $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-2z+4t & = & 5 \\ 2x+4y-3z+t & = & 3 \\ 3x+6y-4z-2t & = & 1 \end{array}\right.$