

ENSEMBLES

Georg Cantor (1845 - 1918) est à l'origine de la théorie des ensembles. Il a notamment construit l'ensemble des réels à partir des rationnels, construction formalisée par Richard Dedekind (1831 - 1916). La théorie des ensembles donne lieu à de multiples questions tortueuses, voire des paradoxes.

Le plus célèbre des paradoxes est probablement le paradoxe de Russel (Bertrand Russel, 1872 - 1970), qui peut se traduire en langage imagé par : le barbier d'un village rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes ; le barbier doit-il se raser ?



Un *ensemble* E est une collection d'objets. Chaque objet de E est appelé *élément* de E . On note $x \in E$ si l'élément x **appartient** à E , et $x \notin E$ dans le cas contraire.

I. Notations des ensembles

On note en général les ensembles avec des accolades $\{ \dots \}$ qui se lisent « ensemble de ... », et à l'intérieur, la description des éléments de l'ensemble, cette description peut prendre plusieurs formes :

- la liste des éléments qui le constituent, par exemple :

$$E = \{3; -7; 49\} \quad \text{« } E \text{ est l'ensemble constitué des éléments } 3, -7 \text{ et } 49 \text{ ».}$$

$$\mathbb{N} = \{ \dots \}$$

- la description précise des éléments, par exemple :

$$F = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n^2+3} \leq 10^{-5} \right\} \quad \text{« } F \text{ est l'ensemble des entiers naturels } n \text{ qui vérifient l'inégalité } \frac{1}{n^2+3} \leq 10^{-5} \text{ »}$$



$$G = \{2p, p \in \mathbb{N}\} \quad \text{« } G \text{ est l'ensemble des nombres } 2p \text{ obtenus lorsque } p \text{ décrit l'ensemble des entiers naturels »}$$

on peut aussi écrire $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ « G est l'ensemble ... »

On dispose aussi d'écritures spécifiques pour les intervalles :

- $[a, b] = \dots\dots\dots$
- $\llbracket a, b \rrbracket = \dots\dots\dots$
- $\mathbb{R}^* = \dots\dots\dots$
- $\mathbb{N}^* = \dots\dots\dots$



On rappelle que l'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide*, et il se note \emptyset . Ainsi, $\emptyset = \{ \}$.

Définition.

Soient A et E des ensembles.

On dit que A est *une partie de* E , ou que A est un *sous-ensemble* de E si et seulement si tout élément de A appartient à E :

$$A \text{ est une partie de } E \quad \text{si et seulement si} \quad x \in A \Rightarrow x \in E$$



Si A est une partie de E , on note $A \subset E$ « A est inclus dans E ».

L'*ensemble de toutes les parties* de E est noté $\mathcal{P}(E)$.



Remarques de notation : « A est une partie de E » se note $A \subset E$ mais aussi $A \in \mathcal{P}(E)$.

Et si x est un élément de l'ensemble A , on note $x \in A$ ou $\{x\} \subset A$.

Exemple : si $E = \{a; b; c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{ \dots$



Méthode : pour montrer qu'un ensemble A est une partie de E , on montre que si un élément x est dans A , alors il est aussi dans E : « soit $x \in A$, [...] donc $x \in E$ ».

Exemple : si $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -2\}$ et $B = \{n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, montrons que $\dots \subset \dots$.

Propriété.

Soient E et F deux ensembles.
Alors : $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.



Méthode : pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder par **double-inclusion** :

- * on montre que $A \subset B$: « Soit x dans A , montrons que x est dans B »
- * on montre que $B \subset A$: « »

Voir **Exercices 4.** et **5.** (et **6.**).

II. Opérations sur les ensembles

Définition.

Si E est un ensemble, et A et B sont deux parties de E , on peut définir de nouvelles parties de E :

- la **réunion de A et B** , notée $A \cup B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B , $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Le *ou* est inclusif : les éléments à la fois dans A et B sont dans la réunion.
- l'**intersection de A et B** , notée $A \cap B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B :
 $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Deux ensembles sont **disjoints** si leur intersection est vide.
- le **complémentaire de A dans E** , noté A^c ou $E \setminus A$ ou \bar{A} :
c'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A ,
 $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Remarque : la notation \setminus s'utilise aussi plus généralement : $A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Exemples : on travaille dans $E = \mathbb{R}$:

$[0; 2] \cap]1; 3] =$ $[0; 2] \cup]1; 3] =$ $\overline{[0; 2]} =$ $[0; 2] \setminus]1; 3] =$

Propriété. Règles de calcul.

- Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de cet ensemble.
- commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
 - associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté $A \cap B \cap C$ (.....)
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté $A \cup B \cup C$;
 - distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 - lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Exemples :

1. Résoudre $2 \cos(3x) = \sqrt{3}$ et décrire avec les notations précédentes, l'ensemble \mathcal{S} des solutions.
2. Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$.
Écrire A , B et C sous forme d'intervalles ou union d'intervalles.
Puis exprimer \bar{A} , \bar{B} , $A \cap B$ et $A \cup B$.

Définition. Produit cartésien de deux ensembles.

Soient E et F deux ensembles.

Le **produit cartésien de E par F** , noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$,

$$E \times F = \{(x; y), x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

On note $E^2 = E \times E$.

☞) **Remarque :** $E \times F$ se lit « E croix F », et E^2 se lit aussi « E au carré ».

Exemples : $E = \{2; 4; 11\}$ et $F = \{-1; \pi\}$, alors $E \times F = \dots\dots\dots$
 $\mathbb{R}^2 \dots\dots\dots$
 $\{1; 4\} \times \{a, b, c\} = \dots\dots\dots$

Définition. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles.

On définit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$.

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est appelé le produit cartésien de E_1, E_2, \dots, E_n .

On note $E^p = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ et un élément de E^p est appelé un **p -uplet** ou une **p -liste** d'éléments de E .



Attention : $(2; 3) \neq (3; 2)$ mais $\{2; 3\} = \{3; 2\}$.