Intégration sur un segment.

Le fondement de la théorie de l'intégration est de calculer l'aire d'une surface sous une courbe. C'est Leibniz (1646-1716) qui initia la recherche dans ce domaine et introduisit les notations :
$\int$ est un « S » étiré pour signifier ***somme*** et le $\mathrm{d}x$ est une variation infinitésimale de x.

Toutefois, ces calculs d'aire posèrent de nombreux problèmes théoriques, qui furent en partie résolus par Riemann (1826-1866), puis par Lebesgue (1875-1941), qui, par une autre approche, permet d'étendre la notion d'intégrabilité à d'autres fonctions. C'est le début de la théorie de la mesure qui est à la base de la théorie des probabilités continues.

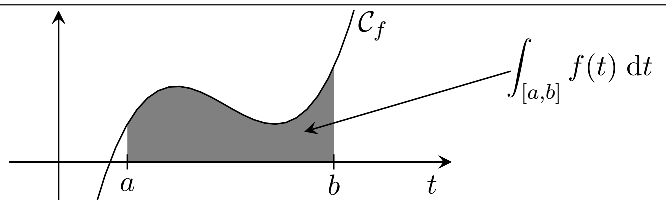
Les intégrales sont toujours source de recherches.

I. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1) Définition

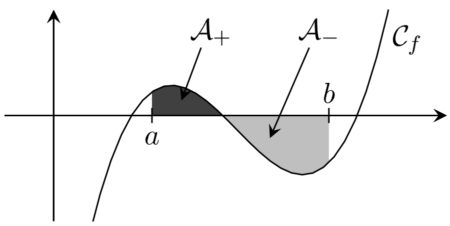
Définition.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b dans I (avec $a < b$).
f est une fonction continue sur I, à valeurs positives sur $[a, b]$, alors l'***intégrale de*** f ***sur*** $[a, b]$ est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et représente l'aire de la surface située entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. (mesurée en unités d'aires)
On peut aussi noter cette intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.



Extensions de la définition : une intégrale est une aire ***algébrique*** (ou orientée).

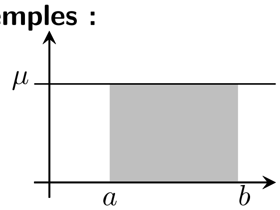
- cas où la fonction prend des valeurs négatives : en dessous de l'axe des abscisses, les aires comptent négativement.

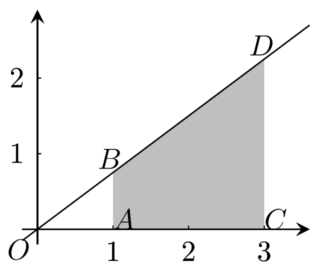


$$\int_{[a,b]} f = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$

- cas où les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant : si $a > b$, alors on pose $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$.

Exemples :

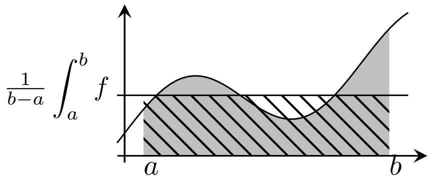
- 

- 

Ici $f(x) = \frac{3}{4}x$ et donc

Définition.

On appelle valeur moyenne sur $[a,b]$ de la fonction f le nombre $\frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.



2) Propriétés de l'intégrale

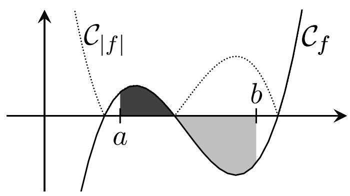
Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et $[a,b]$ est inclus dans I.

Positivité : Si f est à valeurs positives sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

Croissance de l'intégrale : Si pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

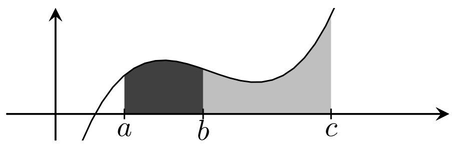
Théorème de nullité : Si f est continue et à valeurs positives sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ alors $f = 0$ sur $[a,b]$.

Intégrale et valeur absolue : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$



Les deux propriétés qui suivent sont valables quel que soit l'ordre des bornes : a, b et c sont dans I.

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$



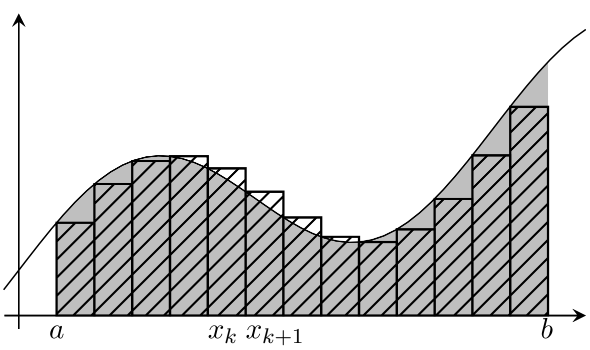
Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \displaystyle\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$ et donc $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k$.

3) Sommes de Riemann

Définition.

On appelle ***sommes de Riemann de f sur*** $[a,b]$ les nombres :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$



$S_n(f)$ est la somme des aires des n rectangles, elle correspond donc à l'aire hachurée dans la figure ci-contre, en effet :

- la largeur ℓ d'un rectangle est ....
- le côté gauche du k-ième rectangle est en
- la hauteur h_k est ....

Le k-ième rectangle a donc pour aire

Théorème.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Démonstration dans le cas où f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:
L'idée est d'étudier la différence entre $S_n(f)$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ pour un n fixé, et de la majorer par une quantité qui va tendre vers 0.

Première étape : découper cette différence en somme des différences sur chaque rectangle.

- pour k fixé : $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$ peut être vue comme l'aire sous la droite horizontale d'équation $y = f(x_k)$, entre les abscisses x_k et x_{k+1}, autrement dit $\frac{b-a}{n} \times f(x_k) = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t$
- et par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $S_n(f) - \displaystyle\int_{[a,b]} f =$

Applications :

- Trouver des valeurs approchées d'intégrales. Cela s'appelle la ***méthode des rectangles à gauche*** : on calcule la somme des aires des rectangles, et plus le nombre n de rectangles est grand, plus le résultat est proche de l'intégrale.
  Par analogie, on peut aussi appliquer la méthode des rectangles à droite, ou la méthode des trapèzes.
- Calculer des limites de sommes en les mettant sous forme d'une somme de Riemann.
  Par exemple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.
  On remarque : $\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
  En notant $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$

II. Calcul intégral

Théorème.
Si $x_0 \in I$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur I : c'est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Démonstration : voir **exercice 1**.

1) Calcul d'une intégrale avec une primitive (rappels)

Théorème.
Soient a et b dans un intervalle I, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Exemple : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$

2) Intégration par parties

Il se peut que l'on ne trouve pas de primitive avec les méthodes usuelles. On peut alors reconnaître dans une intégrale un produit de deux fonctions dont l'une a une primitive simple (par exemple e^x, ou un polynôme) et/ou l'autre a une dérivée simple (en général ln car elle devient une fraction rationnelle). On utilise alors la formule :

Propriété.

u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et a et b sont deux nombres de I.

Alors : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

Justification de la formule : $\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Donc $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $x \mapsto u(x)v(x)$ est une primitive de $x \mapsto (uv)'(x)$, donc $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b$.

Donc $\displaystyle\big[u(x)v(x)\big]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Autrement dit $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$. □

Exemples classiques d'utilisation :

1. calculer $\displaystyle\int_1^4 (3x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$

2. trouver une primitive de $x \mapsto x\ln(x)$.

Astuces, conseils :

1. Avant de se lancer dans une intégration par parties, s'assurer que l'on ne peut pas trouver une primitive !
2. Écrire $u'(x) = \ldots$, $v(x) = \ldots$, puis $u(x) = \ldots$, $v'(x) = \ldots$, et la formule, de sorte qu'il ne reste ensuite plus qu'à remplacer.
   Attention au signe $-$, utiliser des parenthèses !
3. Avec un sin ou un cos il est parfois nécessaire de faire une 2ème intégration par parties, en continuant dans le même sens (voir exercice 4. E)
4. Toujours avoir à l'esprit que lors de l'application de cette technique, on doit quand même trouver une primitive (de uv'), il faut donc veiller à ce que ce uv' soit plus simple que la fonction de départ.

3) Changement de variable

Théorème.

Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $\varphi(I)$.

Alors pour tous a et b dans I, $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Justification de la formule : On note F une primitive de f.

Alors $\star$ $f(\varphi(t))\varphi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t)$

donc $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F \circ \varphi(t)\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

$\star$ $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

Donc l'égalité est vraie. $\square$

Méthode : en général, on nous suggère le changement de variable : $x = \varphi(t)$ (ou $u = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(u)$ ...).
Il y a 2 cas : on peut chercher à calculer $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\mathrm{d}t$.
Dans tous les cas :

1. identifier les nouvelles bornes (on doit avoir $x_1 = \varphi(t_1)$ et $x_2 = \varphi(t_2)$) ;

2. calculer $\varphi'(t)$ pour pouvoir écrire l'égalité $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;

3. réécrire l'intégrale avec les nouvelles bornes (dans le même ordre !), et :
⋆ dans le 1er cas on remplace tous les x par $\varphi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
⋆ dans le 2ème cas on remplace $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$ et les $\varphi(t)$ par x.

Exemple : calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

III. Une application des intégrales : approximation de fonctions, inégalités

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, soient a et x dans I et $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \tfrac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \tfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé ***reste intégral d'ordre*** n.

Démonstration par récurrence.

Application : on applique la formule de Taylor avec reste intégral en 0 au rang n pour la fonction f définie par $f(x) = e^x$.